CERTITUDINILE HAZARDULUI
MARCEL BOLL
Certitudinile în româneşte de Ş. Grigorescu şi
Alex. Popovici
EDITURA
ŞTIINŢIFICĂ ŞI ENCICLOPEDICĂ
BUCUREŞTI 1Q78
Coperta: Simona NICULESCU
MARCEL BOLL
LEŞ CERTITUDES DU HASARD, dixieme edition
e Presses Universitaire de France, Paris, 1941
INTRODUCERE
l

La prima vedere, *asocierea* hazardului *cu* certitudinea pare *o sfidare la adresa bunului simţ*: *aleator* şi *indubitabil se opun gramatical*, *la fel ca jos şi sus*, *frig şi cald*, *negru* şi *alb*… Am p*utea con*t*inua la* n*esfârşit această enu*m*erare, îm*p*rumutând lim*b*ajul uzua*l*, a* cărui *pri*n*cipală ca*r*acteristică est*e *de* a *fi, într-o manieră naivă, ca*l*itativ de* vr*e*m*e ce* r*ecurge doa*r *la* d*a sau nu.*

Dimpotrivă, *limbajul ştiinţific reuşeşte să realizeze o gradaţi» fină pentru fiecare calitate*, *graţie unor noţiuni cărora prea adesea avem obiceiul de a le subaprecia precizia şi puterea de cuprindere*.

Strict vorbind, *în jurul nostru totul e întâmplător*; *totul se eşalonează între certitudine şi imposibilitate*.

Certitudine. *Aţi spus unui prieten*: „*Mâine*, *la ora asta*, *voi fi acasă*".

Măsura certitudinii. *Aveţi patruzeci de ani*. *Din tabelele de mortalitate aflaţi că aveţi o şansă din 92 de a muri în următoarele 365 de zile*, *deci o şansă din 33 580 de a muri în următoarele douăzeci şi patru de ore*. *Dacă nu apar alte piedici*, *proiectul dumneavoastră are 33 579 şanse din 33 580 de a se realiza*.

Imposibilitate. *Auziţi pe cineva spunând*: „*Am luat ultimul bilet la loterie*, *fiindcă sunt sigur că voi câştiga lozul cel mare*".

Măsura imposibilităţii: *Există un singur bilet care asigură*

câştigul maxim şi *299 999 care nu ne aduc un câştig de cincisprezece milioane1. Fraza pronunţată are trei şanse dintr-un milion de a deveni realitate. Gradul ei de imposibilitate este „cu mult mai mare" decât gradul de certitudine al afirmaţiei anterioare: în preziua tragerii, fiecare posesor al unui bilet loto are de zece ori mai multe şanse de a muri în următoarele douăzeci şi patru*

1 Cel mai mare câştig posibil la loterie în Franţa anilor premergători celui de-al doilea război mondial (*N.T.*).

«INTRODUCERE

de ore decât de a câştiga marele loz... Clte *oare din acţiunile noastre* sunt *sugerate de reguli* atât *de precise de conduită1?*

Hazardul poate să ocupe orice treaptă între cvasicertitudine şi cvasi-imposibilitate. Tocmai aceste grade de incertitudine le evaluează calculul probabilităţilor, într-un mod riguros, cu nimic inferior celui în *care procedează celelalte ramuri ale ştiin* – (*ei*.

Şi dacă s-ar fi păstrat moda de odinioară de a da unei cărţi două titluri sinonime, am fi ales desigur: „*Certitudinile hazardului*" sau reperarea exactă a incertitudinii.

M. B.

l

CARACTERUL ALEATOR AL VIITORULUI

Oamenii de litere şi filosofii au dezbătut îndelung avantajele sau inconvenientele pe care ni le-ar aduce o cunoaştere *perfectă* a viitorului. Problemă de minimă importanţă, ca să nu spunem de prisos, care ţine de metafizică sau de fabulaţie... În ceea ce priveşte gândirea veritabilă şi, prin urmare, comportamentul adecvat, gânditorii moderni – începând cu Renaşterea – au întors spatele idealului grecilor antici. Pentru antici esenţială era construirea unei imagini a lumii în conformitate cu gustul sau (cum spuneau ei) cu raţiunea lor. Pentru noi, universul este impus omului: nu suntem liberi să ne alegem soarta; dacă vrem să trăim, trebuie să ne acomodăm cu ceea ce există. Lucrurile sunt astăzi atât de diferite de ceea ce erau altă dată încât, sincer vorbind, nu putem reproşa nimic anticilor [39]1.

Oricare ar fi subiectul care ne solicită spiritul, cunoaşterea

realului este ştiinţă, al cărei scop este enunţarea de *legi de previziune*. Previziuni inegal încununate de succes şi care se referă la numere, forme, materie şi radiaţie, viaţă, psihic şi intelect, societatea umană.

De mai puţin de un secol ştim, pe baza experienţei, că legile de previziune se împart în două tipuri ireductibile:

1. *Legile de lip clasic2*, cum ar fi: iluminarea unui ecran de carton variază invers proporţional cu pătratul distanţei care îl desparte de o lampă. Distanţa este numită *variabilă independentă*, iar iluminarea – *variabilă dependentă*: dacă

1 Numerele în caractere grase se referă la indexul bibliografic (p. 98). * Aceste legi sunt astăzi cunoscute sub numele de *legi deterministe* (*N.T.*).

g CARACTERUL ALEATOR AL VIITORULUI

alegem pentru distanţă o valoare oarecare, după bunul nostru plac, gradul de iluminare este perfect determinat.

2. *Legile zise de probabilitate1*, care fac să intervină în plus *variabilele aleatoare*. Iată un exemplu simplu [11]: niciun savant nu poate să spună dacă un copil care se va naşte peste câteva luni va fi băiat sau fată, dar toţi cei ce se ocupă de demografie cunosc proporţia exactă dintre numărul de naşteri masculine şi cele feminine; ei au din punct de vedere ştiinţific certitudinea că anul viitor se vor naşte puţin mai mulţi băieţi decât fete.

Aceste idei, de achiziţie recentă, alcătuiesc un ansamblu vast, în care bunul simţ cotidian ne induce în eroare aproape totdeauna. Motivele acestei lipse de înţelegere sunt multiple [19]. În viaţa de toate zilele, dorinţele noastre înclină balanţa, făcându-ne să considerăm ca sigură realizarea unui eveniment fericit. Pesimiştii se înşală şi ei, dar în sens invers. Şi mai ales, marele public s-a obişnuit să considere ştiinţa ca deterministă, compusă din legi de tip clasic: el vrea certitudini şi cu greu acceptă ideea că un eveniment nu poate fi prevăzut în mod perfect riguros; el nu-şi dă seama că „a prefera certitudinea" (când problema *bine formulată* nu comportă certitudine) nu înseamnă decât a prefera că 2 şi cu 2 fac 5 [11]. Multor oameni le este cvasi-imposibil să-şi asimileze noţiunea de probabilitate: credulitatea şi neîncrederea

sunt singurele lor atitudini curente. Opinia publică este în general formată din opinii extreme, deopotrivă greşit fundamentate [2].

Este deci cât se poate de util să scoatem în evidenţă *importanţa şi rolul aleatorului* în gândire şi viaţă.

Evenimentele aleatoare figurează, desigur, în limbajul de fiecare zi, sub formă de adjective, substantive şi adverbe. Acest vocabular e relativ bogat, dar mai ales vag, lacunar şi echivoc: enumerarea completă a termenilor uzuali nu prezintă câtuşi de puţin interes.

1 Procesele economice, biologice, intraatomice etc., care sunt guvernate de legităţi statistice (de legi de probabilitate sau probabilistice) sunt desemnate astăzi prin anumiţi termeni sinonimi, cum ar fi: procese aleatoare, procese stochastice, procese probabilistice (*N*. *T*.).

CARACTERUL ALEATOR AL VIITORULUI

Pentru a fixa ideile, vom alege aici treptele următoarei gradaţii:

1 imposibil, neverosimil, îndoielnic, n! o plauzibil, cert;

(punctele înlocuiesc două adjective, care ne lipsesc în limbă şi care ar corespunde, primul lui „foarte plauzibil", al doilea lui „aproape sigur"). Rupând o dată pentru totdeauna cu obiceiul de a face distincţie între lucruri prin „da" şi „nu", vom spune în mod convenţional că aceste şapte cuvinte (sau locuţiuni) sunt varietăţi ale genului *aleator*: aleatorul se întinde deci peste nenumărate tranziţii, de la imposibilitate (*inclusiv* imposibilitatea) până la certitudine (*inclusiv* certitudinea). Nu ne jenează deloc faptul că, neglijând conformismul verbal, considerăm în principiu imposibilul şi certul drept *cazuri particulare* ale aleatorului. Pe de o parte, ne pregătim efectiv să evaluăm incertitudinea. Iar pe de altă parte, fără să anticipăm asupra celor ce urmează, ni se întâmplă în fiecare moment să fim puşi în faţa întrebării: în ce măsură cutare eveniment este aleator?

a) Apariţia evenimentului se situează la mijlocul drumului între imposibil şi sigur. Este *aproape* sensul adjectivului „plauzibil"; dar alte turnuri de frază ar conveni mai bine: „poate că da, poate că nu"; „se poate paria cu şanse egale"; „avem o şansă din două".

b) Apariţia evenimentului se situează mai aproape de

imposibilitate decât de certitudine: eveniment îndoielnic, eveniment neverosimil.

c) Sau mai aproape de certitudine decât de imposibilitate.

d) În fine, evenimentul poate fi perfect cert sau absolut imposibil. Acesta este un răspuns corect şi satisfăcător la problema pusă. În acelaşi timp, începem să înţelegem că legile de tip clasic (determinismul rigid) constituie un caz particular al legilor de probabilitate sau, cum se spune, al determinismului statistic.

10

CARACTERUL ALEATOR AL VIITORULUI

Până acum am evitat cu grijă folosirea adjectivelor „probabil" şi „posibil". „Probabil" nu mai are nimic comun cu sensul său etimologic1. Cât despre „posibil", el e unul din rarele cuvinte cărora este convenabil să le păstrăm accepţiunea comună: ceea ce se poate întâmpla. Două evenimente sunt egal posibile sau, în limbajul matematic, *echiprobabile*, dacă ele sunt egal depărtate de certitudine, dacă suntem la fel de nedecişi asupra apariţiei lor [37]; un moment de gândire ne va convinge că ne aflăm într-un asemenea caz, dacă vrem să obţinem CAPUL la aruncarea cu moneda sau un NUMĂR PAR (2, 4 sau 6) la aruncarea cu zarul; de asemenea, folosind un singur zar, apariţia lui DOI şi a lui CINCI sunt echiprobabile. Etc.

În treacăt fie zis, înţelegerea greşită a noţiunii de echipro-b-ibilitate este o sursă nesecată de erori şi chiar de prostii, în majoritatea dilemelor („din două, una"), cele două eventualităţi nu sunt echiprobabile. Oricine este îndreptăţii să-şi spună:

Mâine voi fi mort sau voi fi în viaţă. Dar de aici nu trebuie conchis: Am „deci" o şansă din două să mor în timpul nopţii. Căci cele două eventualităţi contrare nu sunt echiprobabile. Nu vă grăbiţi să surâdeţi: o asemenea greşeală grosolană a fost comisă [5] de marele savant D'Alembert2, care a persistat în modul său de a vedea lucrurile, fără a se lăsa convins de un raţionament ireproşabil al matematicianului Euler3.

1 în limba franceză, adjectivul „probabil" derivă din verbul latin „probare", care înseamnă „a dovedi", „a demonstra"; ca atare, sensul

etimologic este în franceză de „demonstrabil”, „care poate fi dovedit”. Astăzi el este folosit în limba franceză exact cu acelaşi sens ca în limba romană (*N.T.*).

2 Jean Le Rond D’Alembert (1717 – 1783), filosof iluminist, matematician şi scriitor francez. Membru al Academiei de Ştiinţe, secretar al Academiei Franceze, a participat la redactarea celebrei Enciclopedii franceze (articolele de matematică şi *Discursul preliminar*). Ca matematician, a adus o contribuţie importantă la fundamentarea mecanicii, formulând regulile generale pe care se bazează stabilirea ecuaţiilor diferenţiale pentru mişcarea sistemelor discrete de puncte materiale; în conştiinţa publicului larg, el rămâne bine cunoscut printr-o teoremă esenţială pentru rezolvarea ecuaţiilor algebrice, care îi poartă numele (*N.T.*).

3 Leonhard Euler (1707 – 1783), matematician şi fizician elveţian, şi-a desfăşurat cea mai mare parte din activitate la Petersburg. A adus contribuţii importante la dezvoltarea analizei matematice, a teoriei ecuaţiilor diferenţiale şi a teoriei numerelor; a fost creatorul calculului variaţiilor (*N.T.*).

CARACTERUL ALEATOR AL VIITORULUI U

Locul probabilului, respectiv al posibilului, printre celelalte varietăţi de aleator este foarte prost fixat de limbajul curent. Recent, bazându-se pe argumente de ordin etimologic, un distins lingvist a declarat, într-o cronică, că se poate spune: „Este probabil, e chiar posibil”. Personal aş fi preferat: „Este posibil, este chiar probabil”. Opozantul meu a fost de acord cu această formulare; dar ezitarea iniţială [42] este simptomatică.

De altfel, adjectivul *probabiliste* unul din cele mai neraţional folosite. Este probabil că „acest cal va ajunge primul la pototi”, sau că „acest campion de box îl va face knock-out pe adversarul său”, sau că „mâine va ploua”. Toate aceste turnuri de frază nu fac decât să exprime estimări subiective1, bazate pe unele informaţii, opinii sau dorinţe [14].

Iată alt exemplu de folosire mai raţională [17]. Ieşim din casă şi cerul e senin. Presiunea barometrică este ridicată. Va ploua? E puţin

probabil. Dacă aflăm că vremea e frumoasă pe o rază de cinci sute de kilometri, este încă şi mai puţin probabil.

— Dar dacă presiunea barometrică este ridicată şi cerul e acoperit, sau dacă presiunea e joasă şi cerul senin, în care din cele două cazuri, vremea frumoasă este mai probabilă?

În aceste probleme sau în altele analoage, pe care le vom întâlni pe parcursul expunerii noastre, micşorarea „caracterului aleator al viitorului" nu se poate efectua decât printr-o aprofundare a noţiunii fundamentale de eveniment aleator. Acesta este obiectivul pe care ne vom strădui să-l atingem, fără să neglijăm denunţarea, în treacăt, a altor sofisme.

1 Exemplele dale de autor se leagă de ceea ce în matematică se numeşte *probabilitate subiectivă*. Cititorul poate găsi informaţii deosebit de interesante despre această noţiune în cartea „Dialog despre calculul probabilităţilor" de Alfred Renyi (Ed. enciclopedică română, „Orizonturi", nr. 53), în capitolele „A patra scrisoare" şi „încă o scrisoare către cititori" (*N.T.*).

„O ŞTIINŢĂ A IGNORANTULUI".

Bazându-ne pe noţiunea de „echiprobabilitate", vom putea măsura caracterul aleator al unui eveniment [33]. Din punct de vedere ştiinţific, ne mulţumim exclusiv cu următoarea definiţie:

PROBABILITATE (substantiv feminin), mărime numerică aleasă pentru aprecierea cantitativă a caracterului aleator al unui eveniment.

Desigur, Dicţionarul Academiei Franceze ar adăuga:

ALEATOR (adjectiv) se numeşte un eveniment căruia i se poate atribui o anumită probabilitate.

Unii au semnalat în aceasta un cerc vicios sau cel puţin un pleonasm1. Totuşi, această subliniere nu ne va fi decât de folos, căci este important să sesizăm că aceste două cuvinte sunt într-o corespondenţă perfectă. Să adăugăm că, dacă pentru „probabilitate" nu există niciun sinonim, în schimb, pentru „aleator" sinonimele sunt excesiv de multe. Pe lângă echivalentele mediocre deja citate, putem menţiona şi: fortuit, eventual, întâmplător, neprevăzut, imprevizibil, neaşteptat, contingent. Vom renunţa în principiu la toţi aceşti termeni

atât de puţin delimitaţi între ei. De altfel toţi gânditorii „viguroşi" sunt unanimi: în lături cu formulările vagi! chiar cele false le sunt preferabile; adevărul ţâşneşte mai degrabă din eroare decât din confuzie [40]. Cauzele neştiinţei noastre sunt multe, dar imperfecţiunea limbajului este desigur printre cele clintii. Lipsa de claritate a cuvintelor generează vagul

1 Cercul vicios la care se referă autorul este de fapt inexistent atât în definiţia dată probabilităţii de către Bernoulli (şi anume: probabilitatea este „gradul certitudinii, care se raportează la certitudine ca partea la întreg"), cât şi în definirea axiomatică a probabilităţii (cea acceptată azi de lumea matematică); el este aparent şi se datorează doar neclarităţii limbajului comun (vezi şi nota autorului de la pagina 14). (*N.T.*).

Ideilor. Dacă ne-am da mai multă osteneală să definim cu exactitate termenii cu ajutorul cărora judecăm, atunci şi ideile noastre ar fi mai precise şi mai sigure [25].

Să discutăm un exemplu concret, pe care îl vom prezenta cu grija de a evita orice echivoc. Care este probabilitatea să extragem un VALET dintr-un pachet de cărţi de joc?

Prima ipoteză: Un pachet de cărţi de joc conţine 32 de cărţi, dintre care 4 Valeţi.

A doua ipoteză: Cărţile au fost bine amestecate (nu există o ordine preferenţială a cărţilor în pachet).

A treia ipoteză: Nu vedem decât spatele cărţilor (aşa încât, scoţând o carte din pachet, nu ştim nimic despre numărul sau figura înscrise pe faţa ei).

Prima consecinţă: Toate cărţile au şanse egale de a fi extrase.

A doua consecinţă: Probabilitatea de a extrage un VALET este, prin definiţie, egală cu raportul:

$$4 \; l \; p = - = - = 0,125 = 12$$

$$32 \quad 8$$

şanse şi jumătate dintr-o sută.

A treia consecinţă: Probabilitatea de a extrage o altă carte decât Valet este prin urmare:

2S 7

q = – = – = 0, 875 = 87 şanse şi jumătate dintr-o sută. 32 8

Definiţie: Evenimentul considerat în cea de-a treia consecinţă se numeşte „eveniment contrar" al evenimentului precedent; probabilitatea sa *q* se numeşte „probabilitate complementară" a lui *p*. De acum înainte vom spune că două evenimente contrare unul celuilalt sunt respectiv caracterizate de probabilităţile:

P şi l-/>, deoarece suma celor două probabilităţi complementare este egală cu unitatea (100% şanse). Bineînţeles, evenimentul sigur şi cel imposibil sunt evenimente contrare, ale căror probabilităţi (respectiv: l şi O) sunt complementare.

Această definiţie de origine experimentală (ca *toate* noţiunile matematice) este perfect legitimă, într-adevăr, este natural ca probabilitatea să fie definită ca un raport, căci o probabilitate este cu atât mai mare:

a) Cu cât numărul cazurilor favorabile evenimentului aleator este mai mare (numărător).

O ŞTIINŢĂ A IGNORANTULUI".

b) Cu cât numărul total al cazurilor posibile (suma „reuşitelor" şi eşecurilor) este mai mic (numitor).

Insistăm încă o dată, cu riscul de a ne repeta, că nicidecum nu se poate face afirmaţia: deoarece cartea extrasă este sau Valet sau „non-Valet" (altă carte decât Valet), fiecare dintre aceste evenimente are 50% şanse de a se realiza... Extragerea unui Valet şi extragerea unui non-Valet nu sunt echiprobabile: cazurile în care se realizează cel de-al doilea eveniment sunt de 7 ori mai numeroase decât pentru primul.

Definiţia probabilităţii nu se bazează aşadar pe un „cerc vicios" 1, aşa cum au susţinut unii, încercaţi de tentaţia paradoxului [38]. Ca toate noţiunile matematice, probabilitatea este de origine experimentală.

În exemplul ales, e suficient să postulăm existenţa unei mulţimi de 32 de eventualităţi care pot fi distinse experimental şi *să alegem*, în această mulţime o „submulţime" de 4 eventualităţi clar specificate. Fie

că este vorba de o monedă, de un zar, de loterie sau de jocul de ruletă, întotdeauna trebuie să considerăm mărimi fizice egale sau, dacă vreţi, mărimi „aproximativ egale, dacă ne referim la ele dintr-un anume punct de vedere". Cu cât aproximaţia este mai mare, cu atât sunt mai numeroase punctele de vedere pe care le putem adopta şi deci cu atât mai mult egalitatea fizică se apropie de acea noţiune abstractă care este „egalitatea matematică".

Nu am vrea ca abundenţa de ipoteze făcute (p. 13) să-i dea cititorului impresia că ne-am amuza cu inocenţă să tăiem firul în patru! Astfel, prima ipoteză e justificată, căci, dacă am avea de-a face cu un prestidigitator, am putea să ne temem că pachetul său de cărţi e format din 32 de „zece de cupă" [11]; probabilitatea de a extrage un Valet ar fi în acest caz nulă (imposibilitate). De asemenea (a doua ipoteză), dacă pres

1 Iată care „ar fi" cercul vicios: fiecare dintre cele 32 de cărţi are aceeaşi probabilitate de a fi extrasă, anume 1/32; deci nu putem introduce noţiunea de probabilitate decât folosindu-ne… de noţiunea de probabilitate. Această obiecţie, pe care de altfel o putem regăsi în orice ştiinţă, este de natură pur lingvistică; nu e decât ceea ce Ferdinand-Gonseth (1936) a numit „paradox al limbajului" (cum este posibil să conferim unor cuvinte – folosindu-le numai pe ele – un sens pe care nu l-au avut încă niciodată?).

„O ŞTIINŢĂ A IGNORANTULUI" I*

tidigitatorul manevrează pachetul de cărţi astfel încât cartea întoarsă să fie Valetul de treflă, atunci probabilitatea este unu (certitudine), în ceea ce priveşte cea de-a treia ipoteză» prin ea se iau măsuri de precauţie împotriva cazului în care un trişeur ar desena, pe spatele cărţilor, anumite semne distinctive, care îi sunt cunoscute doar lui.

Aşa cum am sugerat încă mai înainte când ne ocupăm de un eveniment presupus aleator, soluţia problemei e uneori: „Acest eveniment e imposibil" sau „Acest eveniment e cert". Imposibilitatea şi certitudinea sunt tocmai *cazurile limită* ale noţiunii, mult mai largi, de probabilitate.

Adoptând un punct de vedere mai general, vom conchide: „Există lucruri pe care le cunoaştem, există lucruri pe care le ignorăm”. Fără să evocăm spiritul domnului de La Palisse» vom răspunde zeflemiştilor că, dacă acest fapt se înţelege fără discuţie, el se înţelege şi mai bine discutându-l…

Într-adevăr, suntem „împinşi” să facem o distincţie capitală între determinismul clasic şi legile probabiliste. Dacă, într-o problemă particulară, dispunem de date suficienteputem da un răspuns cu o aproximaţie foarte bună. Dimpotrivă, în conformitate cu o butadă bine cunoscută, calculul probabilităţilor este „o ştiinţă a ignoranţei”, cel puţin a unei necunoaşteri parţiale. Calculul probabilităţilor este un instrument de avangardă: el ne permite să explorăm „terenuri” inaccesibile, cel puţin în momentul de faţă, altor mijloace de cercetare. Graţie lui ne putem forma o imagine de ansamblu asupra anumitor fenomene. El înlocuieşte neştiinţa, definitivă sau provizorie; nu numai atât – el sugerează metode mai eficiente, pe care ştiinţa le elaborează pe măsură ce ea însăşi progresează [14].

Necunoaşterea este un *element necesar* al chiar existenţei probabilităţii, dar ar fi absurd să ne închipuim că teoria probabilităţilor îşi propune să „plămădească” ştiinţă din necunoaştere, adică să facă ceva din nimic [11]. Dacă sunt întrebat care este probabilitatea de a extrage o bilă albă dintr-un sac *despre care nu mi se spune nimic*, prefer ca, într-un mod politicos, să-l fac pe interlocutorul meu să înţeleagă că nu pot lua în serios o asemenea întrebare; căci s-ar putea ca sacul!

să fie gol, să conţină fasole, sau chiar un iepure ar putea să sară afară din el [17].

Întâia îndatorire a unui spirit ştiinţific este de a elimina problemele false sau prost formulate. Aceasta este o condiţie prealabilă atât pentru determinismul clasic, cât şi pentru legile probabiliste, pentru legile hazardului. Cel mai adesea caracterul întâmplător al anumitor evenimente rezidă în faptul că nu cunoaştem

numărul şi importanţa factorilor complecşi şi greu de evaluat, ce intervin în ele [33]; în asemenea cazuri este preferabil să substituim unei certitudini, actualmente inaccesibilă, previziuni probabilistice1, cărora ne străduim să le conferim maximum de veridicitate [2]. Din păcate, prea adesea se alunecă într-o *credinţă mistică* faţă de hazard, ceea ce nu este decât reversul cauzalităţii considerate – în mod tot atât de eronat [26] – fundament al unei ştiinţe exclusiv deterministe [14].

Vom vedea mai târziu că hazardul a invadat toate „regiunile" ştiinţelor tradiţional deterministe: astăzi, impresie de „ştiinţă a ignorantului" face cauzalitatea2 – şi cu atât mai mult finalitatea!

1 Se cuvine ca această afirmaţie să fie serios amendată. Cititorul nu trebuie să rămână cu impresia că omenirea se serveşte de calculul probabilităţilor ca de un instrument *provizoriu* de explorare a unor zone „tulburi", în care cunoaşterea noastră nu a avansat suficient, zone ce vor fi „abandonate" legilor deterministe odată cu progresele ştiinţifice pe care le vom realiza. Marea majoritate a evenimentelor care sunt studiate cu ajutorul calculului probabilităţilor presupun *prin însăşi esenţa lor* o asemenea modalitate de abordare, în cazul unor fenomene foarte variate (de exemplu, cele economice, sociale, biologice), *o aceeaşi cauză nu are automat acelaşi efect*, iar necesitatea „îşi croieşte" drum printr-o multitudine de „abateri" individuale. *Aceste fenomene sunt guvernate de legităţi statistice şi – ca atare* – nu pot şi *studiate decât din punct de vedere probabilistic* (*N.T.*).

2 Această situaţie – doar aparent paradoxală – este o consecinţă a faptului că multe fenomene, despre care s-a considerat iniţial că decurg deterministic, s-au dovedit a fi „dominate" de legităţi statistice. Studierea deterministă a unor asemenea fenomene a dat rezultate mulţumitoare, atâta vreme cât ştiinţa experimentală, încă insuficient dezvoltată, nu a infirmat complet imaginea pe care o căpătasem despre ele pe această cale (*N.T.*).

3

LIMITELE CERTITUDINII

Ştiinţific vorbind, nu trebuie făcută vreo distincţie între cele două noţiuni de certitudine şi imposibilitate: ştim, într-adevăr, că ele

au probabilităţi complementare. A afirma că un eveniment viitor este cert revine la a afirma că evenimentul contrar este imposibil; o dublă negaţie echivalează cu o afirmaţie. Restul nu sunt decât nuanţe nesemnificative de stil.

Să semnalăm, în treacăt, o ambiguitate de care se face vinovat limbajul curent. Când un eveniment este foarte probabil, se spune, de obicei, că „probabilitatea sa e foarte mare". Această expresie este incorectă şi poate atrage după sine confuzii.

Astfel, de exemplu, un eveniment are 999 de şanse dintr-o mie de a se produce; probabilitatea sa este O, 999: ea nu e „foarte mare", ci foarte aproape de unitate. Eroarea provine din faptul că am putea *paria*, plătind 999 franci contra unul, că acest eveniment nu va avea loc. Mare este *raportul mizelor* (în cazul când consimţim la încheierea unui pariu echitabil), raport care este egal cu câtul probabilităţii considerate *p* prin probabilitatea complementară (l-ţi). *Tabelul* l stabileşte corespondenţa între cele două noţiuni echivalente: probabilitatea (în sensul comun al termenului) ia toate valorile cuprinse între zero (imposibilitate) şi infinit (certitudine). Cititorul să nu-şi închipuie că savanţii nu au adoptat expresia uzuală numai „din spirit de contradicţie" sau „din pedanterie"; probabilitatea *p* este cea care figurează în formule. Evident, nu vom mai vorbi despre probabilitatea comună, dar ne vom reîntâlni cu consideraţii analoage în legătură cu speranţa matematică.

LIMITELE CERTITUDINII

În ceea ce priveşte îndeosebi *limitele* imposibilului (sau ale certitudinii), cititorul va medita cu folos asupra consideraţiilor ce urmează [13]. Pentru a evalua probabilităţi negii

Probabilitatea matematică	PARIEM:	
0, 001		999 contra 1
0, 01		99 contra 1
0, 02778		35 contra

		1
0, 1		9 contra 1
0, 16667		5 contra 1
0, 25		3 contra 1
		1 contra 1
0, 50	la întâmplare	
	plătind 1	
0, 75	plătind 3	
0, 83333	plătind 5	
0, 9	plătind 9	
0, 97222	plătind 35	
0, 99	plătind 99	
0, 999	plătind 999	

Tabelul l – Semnificaţia expresiilor curente jabile la scară terestră, adică probabilităţi ale unor evenimente ce nu s-au produs niciodată în cursul istoriei, trebuie să ţinem seama de oamenii de pe Terra şi de numărul generaţiilor ce s-au succedat de-a lungul secolelor. Ajungem astfel la concluzia că o probabilitate este complet neglijabilă la scară pământească, dacă ea se exprimă printr-o fracţie al cărui numărător este unitatea, iar numitorul este cifra *unu* urmată de 20 sau 30 de zerouri.

Când este vorba de fenomene care îl privesc pe om, e natural să alegem o scară umană, adică să ne îndreptăm atenţia fie asupra oamenilor care trăiesc într-un mare oraş (sau într-o ţară), fie asupra numărului de unităţi foarte mici de timp (cum ar fi secunda), care se scurg pe durata unei existenţe. Aceste două puncte de plecare, care par destul de diferite, conduc, şi unul şi celălalt, la acelaşi rezultat, şi anume că semenii noştri se comportă, *de obicei*, ca şi când posibilităţile de ordinul milionimei pot fi neglijate. Hiperemotivii, care

suferă de o nevoie excesivă de certitudine, sunt mai exigenţi: ei se întreabă dacă mâncarea lor nu conţine otravă sau microbi nocivi; visează să locuiască în case incombustibile; ezită să iasă la plimbare

când este frig, de frica unei congestii, şi când bate vântul, de teamă să nu fie loviţi de vreo ţiglă… într-o singură situaţie oamenii nu fac abstracţie de o şansă dintr-un milion, şi anume când îşi cumpără un bilet la loterie [11].

Consideraţiile precedente se referă la comportamentul obişnuit, la linia generală de conduită. Dar există evenimente ieşite din comun, care pot avea drept consecinţă scrupule încă şi mai puţin scuzabile. Primesc o telegramă semnată de un prieten al meu, care se referă la o chestiune pe care doar noi doi o cunoaştem: cine mă asigură că telegrama vine de la el? Nu cumva o eroare de transmisie, o coincidenţă a modificat complet adresa, textul şi semnătura?

Există de asemenea o anume probabilitate – care se poate calcula – ca să confund o persoană necunoscută cu un prieten, ca această persoană necunoscută să mă confunde în acelaşi timp cu unul dintre prietenii săi, să mă interpeleze pe nume (care, din întâmplare, să fie cel bun), să-mi vorbească de mai mulţi prieteni comuni (a\ înd aceleaşi nume şi prenume) şi să încheie prin a împrumuta bani de la mine sub un pretext care să-mi pară absolut natural. Comicul unei asemenea situaţii a fost exploatat de Molière în *Domnul de Pour-ceaugnac* [8].

Mai târziu vom înţelege mai bine prin ce se deosebeşte, din punct de vedere al probabilităţilor, o decizie excepţională, luată după matură chibzuinţă, de acţiunile mai mult sau mai puţin automate pe care le facem de mai multe ori lunar. Oricum, să semnalăm, încă de acum, că un eveniment unic poate fi considerat în *practică* ca imposibil, dacă probabilitatea sa nu depăşeşte 0, 01 (1%): dacă o urnă conţine o bilă roşie şi 99 de bile negre, este ne\erosimil ca *la prima extragere*, să scoatem tocmai bila roşie (şi să nu uităm că, în ipoteza în care ne-am plasat, nu facem decât o extragere).

De altfel această definiţie a neverosimuitaţii practice, în cazul unui eveniment nerepetabil, nu a fost dată decât pentru fixarea ideilor. Dacă riscul la care ne expunem, în caz de eroa-LIMITELE CERTITUDINII

re, este mare, nu vom neglija decât o şansă dintr-o mie sau din

zece mii1; la un moment dat chiar şi cei mai prudenţi dintre noi vor fi satisfăcuţi [34].

1 Să dăm un exemplu practic care – în plus – va evidenţia şi ce înseamnă *control statistic al calităţii unui produs*. O întreprindere achiziţionează câteva sute de mii de cărămizi. Pentru a vedea dacă aceste cărămizi corespund normelor tehnice de calitate, cel ce le achiziţionează alege la întâmplare o sută dintre ele, le verifică şi, dacă printre ele găseşte două sau mai multe cărămizi necorespunzătoare, conchide că întregul lot livrat nu corespunde calitativ; căci, dacă ar fi doar 1% cărămizi cu defecte, atunci apariţia evenimentului *unic* de a găsi două sau mai multe cărămizi necorespunzătoare într-o sută, este neverosimilă. Totuşi, dacă o singură cărămidă dintre cele o sută este defectă, el acceptă lotul, asumându-şi riscul ca proporţia cărămizilor defecte să fie mai mare de 1%. Dar oare cine şi-ar asuma un asemenea risc dacă în loc de cărămizi ar fi vorba de un medicament? în acest caz, găsirea unui singur flacon necorespunzător dintr-o mie alese la întâmplare ne va determina să respingem respectivul lot (*N.T.*).

4

SOFISMUL „PRETUTINDENI ŞI TOTDEAUNA".

Investigaţia noastră asupra hazardului axansează progresiv. Constituie deja un succes capacitatea noastră de a caracteriza un eveniment aleator printr-un număr, numit probabilitatea sa, şi care este, în principiu, susceptibil de a lua orice valoare între zero şi unu (între 0% şi 100%).

Posibilitatea de a caracteriza nu implică nicidecum uşurinţa realizării ei şi nici exactitatea sa. Această evaluare întinde capcane, pe care trebuie să le evităm, înainte de a merge mai departe. Căci nu există greşeală mai giavă decât aceea ca – întemeindu-te pe metode precise – să obţii certitudini, pe care datele iniţiale nu le comportă [31]. Vom începe deci prin a da o idee despre aceste dificultăţi, întovărăşindu-ne la drum cu marile spirite, care excelează prin faptul că trec uşor „Din tonul grav la dulce, din glumă la asprime" [B].

Prima anecdotă [28]. Cunosc bine obiceiurile prietenului meu Durând. Ştiu că există doar o şansă din zece ca el să iasă din casă într-o

seară ploioasă. De asemenea pot risca un pariu nouă contra unu că nu va ieşi dacă e prost dispus. Dar – dacă starea de spirit a lui Durând ar depinde doar de vreme – nu aş avea nicio informaţie în plus, ştiind şi că el e prost dispus astăzi şi că astă-seară plouă. Totuşi, în practică, corelaţia nu este atât de rigidă. S-ar putea ca Durând să se fi certat cu soţia sa, să fi pierdut bani la bursă sau să i se fi rupt nasturele de la guler. Dacă proasta sa dispoziţie provine dintr-una din aceste cauze, om putea presupune că el e mai puţin dispus să iasă la plimbare decât dacă pur şi simplu ar ploua.

Ne aflăm în faţa unui exemplu familiar, care ne pregăteşte să înţelegem că probabilităţile pot acţiona unele asupra altora, se pot aduna sau înmulţi.

SOFISMUL „PRETUTINDENI ŞI TOTDEAUNA".

A doua anecdotă [21]. În timpul unei călătorii cu trenul, mă întâlnesc cu un văr mai tânăr, pe care nu l-am văzut de multă vreme. Probabilitatea *p* ca el să se fi născut într-o zi de luni este evident 1/7. Dar eu îl rog să-mi arate buletinul de identitate şi văd că data de naştere e 10 aprilie 1925; din acest moment, îmi vine uşor să stabilesc că această zi a fost o vineri. Probabilitatea precedentă nu mai e 1/7, ci p = O (imposibilitate). Probabilitatea ca el să se fi născut într-o vineri e p „= l (certitudine). E absurd ca acum – dispunând de informaţii *mai complete* – să continuăm să vorbim de

1/7 = O, 142857... ca şi când n-am fi aflat nimic precis. Este o eroare fundamentală să atribuim o probabilitate (diferită de unitate) unui eveniment care *deja a avut loc*: *se* poate afirma – cu indulgenţă – că această greşeală este comisă de 85% din persoanele instruite. Asta nu înseamnă decât că în viaţă ne izbim în fiecare moment de această gravă greşeală de raţionament; din ea provin o grămadă de superstiţii şi incorectitudini. Dacă omenirea ar reuşi să se elibereze de ea de astăzi pe mâine, atunci s-ar realiza, dintr-un singur salt, un progres de zece secole1. Să specificăm de altfel că această din urmă ipoteză are o probabilitate foarte apropiată de zero.

A treia anecdotă [30]. Scena se petrece în rapidul care merge de la Toulouse la Port-Vendres. Personaje: trei călători care se vor

îmbarca cu direcţia Algeria.

— De obicei în luna asta, spune primul, marea e agitată doar o dată la cinci zile; există deci o probabilitate de O, 80 de a face o traversare liniştită.

— Mă scuzaţi, intervine al doilea, am citit ieri buletinul Oficiului Naţional de Meteorologie, care prevede că marea va fi calmă. Şi, cum previziunile sale sunt false doar în proporţie de cinci dintr-o sută, probabilitatea e O, 95.

— Îmi daţi voie, adaugă al treilea, eu însumi lucrez la acest Oficiu şi, exact înainte de a pleca, am telefonat unui coleg, care mi-a spus că „vântul e slab şi marea e calmă"; avem deci o quasicertitudine (O, 99) a unui bun voiaj.

1 Dacă afirmaţia este exagerată în general, ea nu rămâne mai puţin valabilă, în ceea ce priveşte *comportamentul decizional* al omului (*N.T.*).

SOFISMUL „PRETUTINDENI ŞI TOTDEAUNA" 2Î

Călătorii aveau dreptate *toţi trei*, căci orice probabilitate presupune două lucruri: un eveniment viitor şi stadiul nostru actual de cunoaştere1.

Rezultă că o probabilitate, chiar evaluată cu maximum de garanţii şi de competenţă, e departe de a poseda o valoare universală şi eternă: ea nu e pretutindeni şi totdeauna exactă. Dimpotrivă, exemplele precedente subliniază faptul că ea e valabilă *aici şi acum*: ea este relativă la persoana care o enunţă, în exact momentul în care este formulată2. Expresia: „cutare probabilitate este mică" e tot atât de lipsită de sens ca şi „cutare loc e departe" [31]. De aici provin multiple şi grave erori. Cu alte cuvinte, o probabilitate nu poate fi asimiiată cu o constantă fizică, cum ar fi raportul dintre circumferinţa unui cerc şi diametrul său, sau echivalentul mecanic al caloriei. Probabilitatea unui eveniment aleator se înrudeşte mai degrabă cu o mărime variabilă, cum ar fi starea higrometrică

1 Toate trei exemplele – dar mai ales al doilea – pun clar în evidenţă noţiunea de probabilitate condiţionată; căci gradul de certitudine acordat apariţiei unui eveniment *depinde esenţial de*

cantitatea de informaţie pe care o deţinem asupra circumstanţelor în *care el se va produce*. Pentru o analiză detaliată a noţiunii de probabilitate condiţionată, cititorul poate consulta cartea lui Renyi, citată mai înainte, capitolul „A treia scrisoare" (*N.T.*).

2 Aici poate apărea o confuzie ce trebuie neapărat evitată. Este bine ştiut – şi subliniat de filosofia materialist-dialectică – că probabilitatea are o semnificaţie obiectivă; ea nu este decât *măsura obiectivă a posibilităţii*, *independentă deci de cel care studiază un fenomen natural sau social*. Interpretarea *subiectivă* (*personală*) a *probabilităţii* (despre care este vorba în acest paragraf) nu *este decât o modalitate de a estima valoarea efectivă a unei probabilităţi obiective*. Al treilea exemplu dat de autor este de altfel foarte semnificativ în acest sens: marea va fi calmă cu o anume probabilitate, care nu depinde în niciun fel de ceea ce cred despre ea cei trei călători; în conversaţia lor, ei nu încearcă decât să stabilească valoarea acestei probabilităţi, în funcţie de informaţia pe care o posedă şi de încrederea pe care o acordă acestei informaţii. Caracterul obiectiv al probabilităţii îşi găseşte expresia matematică în faptul că *persoane diferite*, care pornesc la investigarea unui fenomen *cu cunoştinţe diferite* despre el, *vor ajunge la o aceeaşi estimare după un număr destul de mare de observaţii*. Afirmaţia primului călător („în această lună marea nu este agitată decât o dată la cinci zile") se referă la o estimare a valorii unei probabilităţi obiective, estimare la care s-a ajuns prin observaţiile mai multor persoane în urma unor observaţii îndelungate, de ani de zile (*N.T.*).

24 SOFISMUL „PRETUTINDENI ŞI TOTDEAUNA".

a aerului sau cota unei valori la Bursă1. Această variabilitate nu impietează asupra legitimităţii meteorologiei, a economiei politice sau a calculului probabilităţilor. Hazardul nu este „ceea ce nu poate fi prevăzut", ci pur şi simplu *ceea ce n-a fost prevăzut*. Desigur nu suntem capabili să prevedem totul, dar niciun fapt nu trebuie considerai „imprevizibil" prin însăşi natura sa [23].

Tocmai prin diversitatea şi variabilitatea sa, noţiunea de probabilitate ne furnizează o reprezentare adecvată a lumii şi a tot

ceea ce se petrece în ea: fenomene materiale şi fapte umane, în circumstanţe speciale, un acelaşi eveniment, bine determinat, poate fi reprodus indefinit, în *aceleaşi* condiţii de apariţie. Se spune în acest caz că este vorba de o *serie de probe repetate*, caracterizată prin „stabilitatea" probabilităţii. Acest caz particular e de o importanţă extremă, servind în mod natural drept *model* pentru studierea evenimentelor mai complexe. Aşa este de exemplu aruncarea cu banul, ca şi echivalentul său comercial, ruleta, unde tehnicile întrebuinţate fac ca trecutul să nu influenţeze în niciun fel viitorul [33]. Din nenorocire, oamenii abandonează, în nume – Io bunului simţ, regula „pretutindeni şi totdeauna", exact în momentul în care formulele stabilite cu grijă fac ca aplicarea ei să fie infailibilă. Asta înseamnă să onorăm prea mult ruleta: ea nu are nici conştiinţă, nici memorie [5]. Această iluzie – aproape unanimă – ar trebui să fie zvârlită peste bord (deşi speranţa într-un asemenea succes e mică!); oricum noi nu ne vom lăsa subjugaţi de ea.

1 Am mai putea cita: gusturile şi înclinaţiile unei persoane, opiniile politice ale unui ministru…

5

URNA TERNARĂ

ŞI ADUNAREA PROBABILITĂŢILOR

Am insistat deja asupra faptului esenţial că teoria probabilităţilor *este o ştiinţă* cu nimic mai prejos decât celelalte. Iată o nouă dovadă. Toate ştiinţele pornesc de la noţiuni simple, de la *modele1*, pe care apoi le complică potrivit cu necesităţile lor:

Aritmetica2 e clădită pe noţiunea experimentală de număr întreg, noţiune pe care o prelungeşte" la fracţie, număr negativ, număr incomensurabil, număr imaginar, număr transfinit…; ea începe cu noţiunea experimentală de adunarecare dă naştere succesiv scăderii, dezvoltării în serie, înmulţirii, factorialului şi analizei combinatorii, împărţirii, ridicării la putere şi radicalului, derivării şi integrării…; ea examinează întâi cea mai simplă interdependenţă (funcţia lineară sau regula de trei simplă), pentru a ajunge la relaţii mai complexe, cum ar fi funcţia Gauss-Laplace (fig. 2) *sau* funcţia lui Galton (fig. 1), *pe* care le

vom întâlni în expunerea noastră.

Să trecem în revistă, fugitiv, compartimente ale ştiinţei» care ne interesează mai puţin direct, întreaga *logică matematică* se poate construi [41] pe baza „afirmaţiei" şi „incompati

1 Autorul spune de fapt: „noţiuni foarte simple, numite şi *modele*", ceea ce este incorect. Noţiunea este o formă logică fundamentală, care reflectă însuşirile esenţiale şi generale ale unei clase de obiecte sau fenomene, pe când modelul e un sistem teoretic sau material cu ajutorul căruia pot fi studiate indirect proprietăţile şi transformările unui alt sistem mai complex (sistemul original) cu care modelul prezintă o anumită analogie. Noţiunile sunt doar „cărămizile" cu care se construieşte un model; „probabilitatea" este o noţiune, „urna" este un model (*N.T.*).

2 Multe din problemele enunţate în frază ca făcând parte din corpul aritmeticii se înglobea/ă de fapt – astăzi, cel puţin – analizei matematice (*N.T.*).

URNA TERNARA ŞI ADUNAREA PROBABILITĂŢILOR

bilităţii". *Geometria* pleacă de la linia dreaptă, pe care o curbează arbitrar sau o deplasează în toate sensurile, pentru a aborda formele cele mai disparate: naturale (munţii Alpi) sau artificiale (Venus din Milo). *Astronomia* consideră stelele la distanţă fixă faţă de Pământ. *Termodinamica* utilizează noţiunea de gaz perfect şi vapor saturat, indispensabile ambele pentru studiul funcţionării motoarelor termice. *Elecliicitatea* fundamentează electrotehnica şi telegrafia fără fir pe noţiunea de conductori şi izolatori perfecţi. *Chimia* face apel la ideea de corp pur sau de reacţie totală. Progresele *biologiei* ar fi fost nule fără teoria fizico-chimică a vieţii. Etc.

Am afirmat că teoria probabilităţilor se sprijină pe noţiunea de *serie de probe repetabile* sau, cum vom spune de aici înainte, pe „schema urnei". Cea mai simplă urnă e urna binară *3*, care conţine două feluri de bile, pe care le amestecăm cu grijă de fiecare dată. Bilele diferă unele de altele doar prin culoare, pentru a se realiza cât mai bine dezideratul echipro-babilităţii; pentru a elimina chiar şi influenţa culorii, ne putem imagina că extracţiile sunt făcute de un orb [20].

Urna binară *3* conţine bile roşa şi bile *negre* (ca să reţină această ordiiis, pe care o vom păstra de-a lungul întregii expuneri, cititorul să se gândească la jocul de ruletă sau la romanul lui Stendhal); numărul bilelor roşii este r, cel al bilelor negre e n, iar urna o vom nota convenţional:

$ (*r*; *n*); probabilitatea *p* de a extrage o bilă roşie e:

Pr =

r + n probabilitatea complementară

P» = l – *Pr* de a extrage o bilă neagră e deci:

n

Pn =

r + n

Cititorul îşi reaminteşte de „întâlnirea" noastră incidentală cu urna binară

(2 (1; 99),!

URNA TERNARA ŞI ADUNAREA PROBABILITĂŢILOR 27

când am considerat că probabilitatea pe = l/100 e neverosimilă.

Să menţionăm că, dintre toate urnele binare, cea mai simplă e cea pe care o vom numi „urnă-etalon":

c5 C; n) cu *r* = *n*, pentru care cele două probabilităţi sunt egale:

(50 de şanse din 100; putem paria un leu contra un leu); aţi recunoscut desigur în acest caz particular jocul de-a aruncatul cu banul 1, practicat în condiţii ce garantează echiprobabilitatea: moneda trebuie să fie simetrică din punct de vedere geometric şi omogenă din punct de vedere fizic; ea trebuie aruncată astfel încât nici apariţia PAJURII, nici a CAPULUI să nu fie favorizată. Impulsul pe care îl imprimăm monedei, aruncând-o, e în conexiune cu o mulţime de mici factori întâmplători, ce nu pot fi practic analizaţi. Dacă ne-am obişnui să aruncăm totdeauna moneda în acelaşi fel2, am putea prevedea ce se va întâmpla şi apariţia uneia dintre feţe n-ar mai depinde de „hazard" [2].

Planul nostru de aprofundare temeinică ne determină să abandonăm provizoriu urna binară, concentrându-ne atenţia pentru câteva momente asupra urnei ternare:

T (*r*; *n*; *a*), care conţine bile roşii, negre şi albe.

1 Aruncarea cu zarul (a unui *singur* zar) corespunde unei urne cu şase feluri de bile:

& (*", „, *a*; *g*; *a*; *j*) cu *r* = *n* = *a* = *g* = *v* = *j*; în acest model avem!

Pr = *Pn* = *Pa* = *Ps*/ = *pe* = *pl* =. 6

2 Sau, *într-un caz Umilă*, să o aşezăm pur şi simplu pe masă, cu precauţie!

, 8 URNA TE «NARA ŞI ADUNAREA PROBABILITĂŢILOR

Pentru a face mai accesibil raţionamentul 1, ne vom opri la cazul concret:

T (55; 15; 5) (; – + n + a = 73), adică al urnei cu 75 de bile, din care 55 roşii, 15 negie şi 5 albe. Ne propunem să găsim probabilitatea *pt* de a extrage o bilă ne-roşie (care să nu fie roşie), adică fie o bilă neagră, fie una albă. E natural să numim probabilitatea *pt* „probabilitate totală".

Poate cititorul este tentat să spună: „probabilitate de a extrage o bilă neagră SAU albă". Dar această mică conjuncţie SAU, cu aerul său inocent, e cauza a numeroase erori. Nu există *nimic comun* între cele două exprimări:

să reunească *sau* să strângă, să se conformeze *sau* să-şi dea demisia.

Prima e echivalentă cu „sau, dacă preferaţi", „sau, altfel spus", „sau, la fel de bine" ori cu „sau, ceea ce e acelaşi lucru"; avem de-a face cu un *sau* de sinonimie.

A doua poate fi înlocuită prin „sau, dimpotmă", „sau, dacă nu": aici e vorba de un' să» de excludere (ca să folosim termenul consacrat de logica modernă).

Evitând această ambiguitate de limbaj, \om calcula *pt* în două moduri diferite:

1. *pt* este probabilitatea complementară lui pe care este:

55 11

de unde deducem:

4

15

2. Calculând separat *pn* şi *pa*, obţinem:

15 3 51

P» = – = – 91 /›ce = – = – 75 Io 75 15

1 N-ar fi deloc mai dificil să dăm o demonstraţie „literală”:

r + *n* + *a t pe* =

r +

r + n*a*

Păr + *n* + *a*

— de unde: *Pt* = *pn*

URNA TERNARA ŞI ADUNAREA PROBABILITĂŢILOR

ceea ce arată imediat că:

adică, în *ipotezele pe care le-am admis*, probabilitatea de a extrage o bilă ne-roşie (fie neagră, fie albă) e egală cu probabilitatea de a extrage o bilă neagră la care *se adună* probabilitatea de a extrage o bilă albă.

Mai general:

Dacă un eveniment A constă în apariţia altor două evenimente şi C care *se exclud reciproc1 2*, probabilitatea de apariţie a lui A e egală cu *suma* probabilităţilor de apariţie ale lui şi C.

Aceasta este deci valoarea probabilităţii evenimentului „fie B, fie C”: *probabilitatea totală* se obţine *în acest caz* prin adunarea probabilităţilor parţiale.

Putem comite erori flagrante, dacă neglijăm să verificăm, în fiecare caz particular, incompatibilitatea celor două evenimente parţiale.

Vom da un exemplu tipic, în cazul aruncării cu un zar (deoarece problema e uşoară, vom raţiona direct, fără să recurgem la urna cu şase feluri de bile, ceea ce n-ar face decât să co. nplice limbajul, necesitând stabilirea unei corespondenţe între feţele zarului şi culorile convenţionale ale bilelor). Care e probabilitatea ca numărul apărut să fie ori par, ori multiplu de 3?

Iată mai întâi raţionamentul fals. Există trei numere pare şi două multiplu de 3 printre primele şase numere întregi pozitive. Asta înseamnă cinci posibilităţi de reuşită şi, cum numărul posibilităţilor e

şase, probabilitatea „trebuie" să fie 5/6.

Eroarea provine din faptul că faţa ŞASE a fost numărată de două ori (o dată ca număr par, o dată ca multiplu de 3). Deci nu sunt decât patru prilejuri distincte de reuşită şi răspunsul corect e 4/6 (sau 2/3).

Invers.

1 Aceasta înseamnă: dacă B are loc, nu se poate produce C, dacă apare C, realizarea lui B e imposibilă.

2 în limbajul matematic, evenimentele care se exclud reciproc se numesc *incompatibile* (*N. T.*).

30

URNA TERNARA ŞI ADUNAREA PROBABILITĂŢILOR

Teorema probabilităţilor totale se poate deci enunţa fără nicio restricţie:

Dacă un eveniment A se produce prin apariţia unuia din cele două evenimente *oarecare* şi E, probabilitatea lui A e dată de suma probabilităţilor lui şi E, din care se scade probabilitatea ca şi E să se producă simultan.

Când cele două evenimente parţiale (notate anterior cu şi C) se exclud reciproc, cantitatea ce trebuie scăzută este zero şi obţinem tocmai enunţul dat mai înainte.

Vrem să dăm cititorului o idee despre dificultăţile pe care le putem întâmpina în calcularea probabilităţii totale, chiar dacă avem grijă să controlăm incompatibilitatea celor două evenimente parţiale.

Două turnee de tenis vor avea loc peste o lună, în acelaşi tâmp, la Paris şi la New York. Un anume campion are probabilitatea O, 8 de a câştiga turneul de la Paris şi probabilitatea O, 7 de a termina învingător la New York. Desigur cele două eventualităţi se exclud una pe cealaltă, de vreme ce campionul nu are darul ubicuităţii. O aplicare brutală a teoremei de adunare a probabilităţilor ne-ar da:

O, 8-O, 7 = 1, 5, adică probabilitatea unei victorii ar fi de 150%! Puşi în faţa acestui rezultat evident absurd, să nu ne grăbim să tragem concluzii denigrante. O dată în plus, problema e *prost formulată* sau, mai precis, datele ei sunt incomplete. Cele două evenimente sunt într-adevăr *incompatibile* dar nu ştim unde va evolua campionul: va

trebui să-l întrebăm chiar pe el. Dacă el nu s-a decis încă, vom încerca să evaluăm probabilităţile următoarelor trei situaţii:

1. îi este mai comod să rămână la Paris (probabilitatea de participare: 0, 4);

2. Consideră turneul de la New York mai interesant (probabilitatea: 0, 5);

3. Nu îl interesează niciunul din cele două turnee (probabilitatea 0, 1).

Aplicând teorema de înmulţire a probabilităţilor, rezultatul e imediat: probabilitatea unei victorii este 0, 67.

Să fim convinşi că – ori de câte ori din calcularea unei probabilităţi tragem concluzii neraţionale sau ulterior infirmate – nu am înţeles bine problema pe care trebuia s-o rezolvăm.

6

DOUĂ EXTRAGERI DINTR-O URNĂ BINARĂ: ÎNMULŢIREA PROBABILITĂŢILOR.

Pentru a pune în evidenţă comportarea probabilităţilor, este convenabil să alegem schema *cea mai simplă*: nu vom recurge deci la urna ternară decât atunci când însăşi natura problemei ne va împiedica să raţionăm altfel.

Revenind deci la urna binară, ba chiar la urna-etalon, cu componenţa

(3; 3), vom căuta probabilitatea de a extrage *două* bile roşii.

Această problemă nu *are nicio soluţie*, atâta vreme cât nu sunt precizate condiţiile în care se fac cele două extrageri. Cea mai mare parte a amăgirilor, pe care le „hrăneşte" hazardul, provin din probleme *prost formulate*.

Vom examina cele trei soluţii care pot fi date.

Prima problemă, *prima soluţie*. Băgăm mâna stângă în urna şi scoatem o bilă pe care o păstrăm în mână; facem acelaşi lucru cu mâna dreaptă. Care e probabilitatea *Pr* ca în fiecare mână să avem o bilă roşie?

Pentru cele două mâini, există patru cazuri posibile:

RR RN NR NN

(literele sunt plasate în ordinea mâna stângă – mâna dreaptă şi accentele corespund mâinii drepte). Probabilităţile respective le vom nota1

Pr P1

P n.

1 Pentru chestiunea pe care o tratăm nu are nicio importanţă faptul că: *Pr = Pn*! *şi PL = P2*.

32

DOUĂ EXTRAGERI DINTR-O URNA BINARĂ

cu condiţia:

(e sigur că una din cele patru posibilităţi considerate va deveni realitate).

PRIMA EXTRAGERE: Să notăm *eu pe* (= 1/2) probabilitatea ca să extragem cu mâna stângă o bilă roşie. Obţinem cu uşurinţă valoarea lui *pe*, căci cazurile favorabile sunt RR ŞI RN; folosind definiţia, rezultă:

A DOUA EXTRAGERE: De vreme ce în mâna stângă avem o bilă roşie, nu ne mai aflăm în faţa urnei iniţiale, ci a unei noi urne

<5 (2; 3);

să notăm cu *p p* (= 2/5) probabilitatea ca, acum, să „dibuim" cu mâna dreaptă o bilă roşie. Singurul caz favorabil ca şi a doua bilă să fie roşie este RR; cele două cazuri posibile sunt RR ŞI RX şi deci:

Dacă înmulţim membru cu membru aceste două ultime egalităţi, găsim imediat răspunsul căutat:

— JL 2 – *1* 255

Prin urmare, probabilitatea de a avea, în fiecare mână, o bilă roşie este egală cu probabilitatea de a extrage mai întâi o bilă roşie cu mâna stângă, *înmulţită cu* probabilitatea de a extrage apoi o bilă roşie (cu mâna dreaptă) din urna al cărui conţinut *e modificat* (prin efectul primei extracţii).

Mai general:

Când un eveniment X constă în apariţia succesivă a doua alte evenimente Y, apoi Z, probabilitatea de apariţie a lui X este egală cu *produsul* dintre probabilitatea de realizare a lui Y şi *noua* probabilitate ce trebuie atribuită lui Z, *ştiind* ca Y a avut loc1.

de

1 Această probabilitate se numeşte *probabilitatea lui Z condiţională Y* (*N.T.*).

DOUĂ EXTRAGERI DINTR-O URNA BINARĂ

33

Probabilitatea lui X se numeşte *probabilitate compusă*, probabilitatea lui „Z după Y", sau probabilitatea evenimentului „în acelaşi timp şi Z"; probabilitatea compusă se obţine prin înmulţirea probabilităţilor componente.

Acest enunţ despre înmulţirea probabilităţilor e corespondentul celui despre adunarea lor. În ceea ce priveşte valoarea numerică, există însă o diferenţă esenţială: probabilitatea totală e mai mare decât fiecare clin probabilităţile parţiale; probabilitatea compusă e mai mică decât fiecare dintre probabilităţile componente (înmulţind între ele două fracţii, ambele subunitare, obţinem o nouă fracţie, mai mică decât fiecare din cele două iniţiale).

A doua problemă, *a doua soluţie*, întrebarea: „care e probabilitatea *Pr* de a extrage două bile roşii din urna <5?" poate fi precizată şi astfel.

Începem prin a extrage o bilă. După ce vedem care e culoarea ei (presupunem că e roşie), *punem la loc* fi/ a *în urnă*; amestecăm bine bilele şi facem o a doua extrageie. De data aceasta avem de-a face din nou cu *aceeaşi* urnă; cum se spune familiar, „o luăm de la capăt". A doua probabilitate (pe care am notat-o cu *p r*) este identică cu prima *pe* şi formula, pe care am găsit-o mai înainte, devine în acest caz:

rezultatul e mult diferit de cel precedent. Această dificultate nu apărea în cazul probabilităţii totale: când se face o singură extragere, nu trebuie specificat dacă bila este sau nu pusă la loc în urnă.

Teorema probabilităţilor compuse se simplifică în felul următor:

Când un eveniment X constă în apariţia succesivă a doua evenimente identice U, probabilitatea lui X este egală cu pătratul probabilităţii lui U (enunţul se extinde imediat la cazul a N evenimente identice; va fi necesar să revenim mai detaliat asupra acestei chestiuni; probabilitatea compusă devine cu atât mai mică cu cât numărul N e

mai mare).

Caracterizăm a doua problemă, spunând că probabilitatea *pe* e stabilă sau că a doua probabilitate e independentă de

34

DOUĂ EXTRAGERI DEMTH-O URNA BINARĂ

prima1. Cel mai adesea în practică ne întâlnim cu această problemă: ilustrarea ei cea mai familiară este aruncarea cu banul, când se iau toate precauţiile necesare.

A treia problemă, *a treia soluţie*. Cum condiţia pe care o vom impune e neaşteptată, să explicăm întâi pe un caz particular cum poate ea să se ivească. Se dă drumul la o bilă într-o ruletă, de a cărei bună funcţionare nu suntem siguri, şi apare ROŞU. Această experienţă poate să ne întărească presupunerea că ROŞUL e avantajat de un mic defect de fabricaţie…

Să reluăm acum schema urnei binare. Vom conveni că, la fiecare extragere, nu numai că vom pune la loc bila scoasă, dar vom introduce, în plus, o bilă de aceeaşi culoare cu ea.

Dacă prima extragere se efectuează din urna şi dacă scoatem o bilă roşie, a doua extragere se va face din urna

6" (4; 3);

probabilitatea de a extrage succesiv două bile roşii va fi acum:

celei de a treia ipoteze îi corespunde un rezultat numeric mai mare decât fiecăreia din primele două.

De consideraţii de acest tip se leagă şi enunţul unei probleme, ce se poate aplica la fenomene extrem de variate [37]. Studiem un eveniment, fără să dispunem de o metodă de evaluare a probabilităţii sale de apariţie. Singurul lucru pe care l-am constatat este că evenimentul s-a realizat ori de câte ori au fost satisfăcute condiţiile sale de posibilitate. Altfel spus, el s-a produs *de a* ori fără greş. Care e probabilitatea ca acest eveniment să apară încă o dată? Rezultatul presupune

1 Mai corect spus, *cele două evenimente* (şi nu probabilităţile lor) *sunt independente*; apariţia unuia dintre ele nu influenţează în niciun fel realizarea celuilalt (*N.T.*).

DOUĂ EXTRAGERI DINTR-O URNA BINARĂ»

calcule complicate, despre care vom da o idee la pagina 43(*problema a patra*). Să spunem doar că rezultatul [33] este dat de fracţia's + 2 şi că precizia e cu atât mai bună cu cât numărul se mai mare.

O SINGURĂ DATĂ? CEL PUŢIN O DATĂ?

Adunarea şi înmulţirea probabilităţilor constituie abc-ul cunoştinţelor noastre despre hazard. Nu ne îndoim o clipă de dificultăţile ce vor surveni în aplicarea lor, cu atât mai mult cu cât, adesea, vom recurge şi la o operaţie *şi* la cealaltă.

Am insistat în mod deosebit asupra opoziţiei fundamentale dintre urna în care punem şi cea în care nu punem la loc bila extrasă. Tot atât de inutil este să încercăm să înţelegem hazardul, dacă nu dobândim idei clare asupra sensului expresiilor: „o singură dată" şi „cel puţin o dată".

O singură dată. Ca de obicei, vom lua un exemplu în acelaşi timp general şi simplu, cel mai simplu exemplu cu aplicabilitate generală.

Având în faţă un pachet cu 32 de cărţi etalate în evantai (cu spatele în sus), care e probabilitatea *Ps* de a extrage un *singur* AS, dacă luăm în fiecare mână o carte?

Probabilitatea ca Asul să fie extras cu mâna stângă este J*» /2; aceeaşi e probabilitatea pentru mâna dreaptă.

Luăm ca model urna

(3 (4; 28)

şi începem cu mâna stângă. *PSJ2* e o probabilitate compusă:

1. Probabilitatea de a scoate o bilă roşie (un As) cu mâna stângă este, aşa cum ştim:

4 l ps = tt = T

62 o

2. *După ce am tras cu mâna stângă un As*, probabilitatea ca mâna dreaptă să nu întoarcă un As trebuie calculată relativ la noua urnă

(*B1* (*3*; 28)

l

O SINGURĂ DATAT CEL PUŢIN ODATĂ

şi are valoarea:

H

28

Aplicând teorema probabilităţilor compuse, obţinem deci:

8 x31

= O, 22580...

De *două ori*. Să vedem acum care e probabilitatea P2 de a trage un As cu fiecare mână, adică în total doi Aşi.

Şi P2 e o probabilitate compusă. Primul eveniment are o probabilitate *ps*, al doilea1 o probabilitate *p g* „ceea ce dă (printr-un raţionament identic):

P2 = – X – = – = 0, 01201... 8 31 8X31

Cel puţin o dată (prima metodă). Vom nota cu P probabilitatea corespunzătoare. De data aceasta intervin probabilităţile totale.

a) Prima presupunere. Scoatem cu mâna stângă din urna (3 o bilă roşie (un As). Ceea ce înseamnă o probabilitate:

(nu are importanţă, în acest caz, ce vom extrage cu mâna dreaptă).

b) A doua presupunere. Băgăm mâna stângă în urna (*B* şi nu scoatem o bilă roşie (nu tragem un As). Probabilitatea de a obţine o altă carte decât un As este:

Întindem mâna dreaptă către noua urnă o „(4; 31);

1 Primul eveniment este: extrageiea unui As eu mâna stângă, iai al doilea constă în întoarcerea unui As cu mâna dreaptă (*N.T.*).

j, O SINGURĂ DATAT CKL PUŢIN ODATAF *trebuie* să scoatem cu această mână o bilă roşie (un As) şi probabilitatea unei asemenea extrageri este:

4

Utilizând teorema probabilităţii totale, avem în acest caz:

P = *Ps* + (l

(în membrul drept al egalităţii stat doar doi termeni, căci, evident, presupunerile a şi b se exclud). E suficient atunci să efectuăm calculele:

31

8X31

= O, 23790…

Cel puţin o dată (a doua metodă). Să calculăm acum probaibilitatea P de a nu avea în nicio mână vreun As.

I. Probabilitatea ca să nu extragem cu mână stângă o bilă roşie (un As) din urna (B este:

II. Aflându-ne acum în prezenţa urnei (*B*", probabilitatea de a nu extrage cu mână dreaptă un As este:

1 1 4 27 l*pd* = *l* – = – 31 31 Probabilitatea P e dată de teorema probabilităţilor compuse:

= O, 76210…

O X ol

Dar care este evenimentul contrar lui „să nu extragem niciun As"? Ei bine, el este „să extragem cel puţin un As". Cele două probabilităţi şi P sunt probabilităţi complementare, adică:

59

8 x31

= O, 23790…

Cel puţin o dată (a treia metodă), în cazul particular care ne interesează, evenimentul „să extragem cel puţin un As".

O SINGURĂ DATĂ? CEL PUŢIN ODATĂ

(de probabilitate P) se poate realiza în două şi numai în două moduri:

a) Să extragem un As (probabilitate *Ps*);

p) Să extragem doi Aşi (probabilitate *P2*). Acum intră în scenă probabilităţile totale:

P = *PS* + *P2*. Deducem:

56, 3 59

P =

8 x31

8X31

8X31

şi „cădem" din nou peste rezultatul obţinut atât cu prima cât şi cu a doua metodă.

Riscăm prin această analiză minuţioasă să provocăm „reacţii variate", dar:

Am să le fac pe toate, aşa cum judec eu.

Orice, de-acum încolo, veţi spune despre mine… [32]; unii cititori vor socoti poate aceste consideraţii când incomprehensibile, când superflue! De fapt ele nu necesită decât un minimum de interes şi perspicacitate; atenţia pe care trebuie însă să le-o acordăm este ca un antidot împotriva tuturor „gogoşilor", ce se abat ca o mană asupra sărmanei umanităţi, în plus, ele sunt comparabile cu adev*ărurile ele*m*entare de* genul: „când obiectul F e la dreapta obiectului G şi la stânga obiectului H, obiectul F se află între ele" (care e un postulat de ordine în axiomatica lui Hilbert). Într*eaga ştii*nţă se bazează pe fapte expe*rimentale de* acest gen; dar e nevoie de o anumită vigoare intelectuală pentru a desprinde din ele consecinţele pe care le comportă.

8

DOUĂ URNE BINARE: PROBABILITATEA ANTECEDENTELOR

În loc de a extrage – cum am făcut mai înainte – două bile dintr-o singură urnă, putem considera simultan două urne, pe care ne va fi suficient să le luăm binare. Calculul probabilităţilor este, hotărât lucru, o ştiinţă a urnelor mai degrabă decât o „ştiinţă a ignorantului" 1! Ca de obicei, vom alege date numerice care să ne conducă la rezultate cât mai simple posibil.

Cele patru probleme pe care le vom examina succesiv vor avea drept *model* cele două urne:

O (25; 75) o (54; 36)

(prima cu 100 de bile, din care 25 roşii şi 75 negre; a doua cu 90 de bile, din care 54 roşii şi 36 negre). Dacă experimentăm *separat* cu fiecare urnă, probabilităţile sunt:

Pr = – Şi *pn* = – (urna *o*)

4 4

Pr =

Şi

= – (urna o

1 Autorul glumeşte, desigur, dar – vai l – amară glumă! Căci azi mulţi (şi printre ei şi oameni de ştiinţă I) au impresia că teoria probabilităţilor este un fel de joacă gratuită cu urne, doar vag înrudită cu matematica formală, axiomatizată.

Întâi trebuie remarcat că acei ce împărtăşesc această opinie ignoră faptul că, încă din deceniul trei al secolului nostru, calculul probabilităţilor a devenit o disciplină matematică axiomatizată, riguroasă. În al doilea rând, modelul urnei însuşi are bogate implicaţii în practică, nu totdeauna aşa de simple ca acelea tratate în această carte; urna lui Ehrenfest, de exemplu, constituie modelul pentru mişcarea haotică a moleculelor între două containere care comunică (*K.T.*).

DOUĂ URNE BINARE: PROBABILITATEA ANTECEDENTELOR H

Cele patru probleme – care presupun o bună înţelegere a celor expuse mai înainte – sunt de dificultate crescândă; ultimele două ne vor dezvălui lucruri realmente noi.

Prima problemă. Dispunând de urnele o şi *B*, amestecăm conţinutul lor într-o urnă mai mare pe care o notăm (3-<3. Care este atunci probabilitatea pe de a extrage o bilă roşie?

Noua urnă

3 – 3 (79; 111)

conţine 190 de bile, din care 79 roşii, ceea ce ne dă:

Pr = – = O, 41579… 190

Rezolvare copilărească, care nu figurează aici decât pentru a fi comparată cu rezultatul care urmează.

A doua problemă. Considerăm din nou cele două urne o şi *B* distincte, dar presupunem că ele nu pot fi distinse. Urnele sunt puse în faţa dumneavoastră ca să alegeţi una dintre ele1; apoi veţi extrage o bilă din urna aleasă. Care e probabilitatea pea această bilă să fie roşie?

Probabilităţile şi P de a alege urna (*B*, respectiv (*B* sunt egale:

— r>

— R – 2

Odată acest lucru stabilit, nu ne rămâne decât să raţionăm *corect* asupra probabilităţilor compuse şi a probabilităţilor totale,

conformându-ne notaţiilor precedente.

Evenimentul X: Z după Y. Evenimentul Y constă în alegerea urnei (*B* (probabilitate P); evenimentul Z este extragerea unei bile roşii din o (probabilitate *pe*). Probabilitatea *pe* e *independentă* de faptul că am preferat pe *f*]} lui (ZT. Probabilitatea compusă este deci:

P/V

1 Tot atât de bine am putea recurge la o a treia urnă, o urnă-etalon & (r; *n*), în care, precum se ştie, numerele r şi n sunt egale. Exiiagerea lui r (de exemplu) ne obligă să efectuăm extragerea principală din urna (*B*, şi invers.

DOUĂ UBNB BINARE: PROBABILITATEA ANTECEDENTELOR

Consideraţii identice ne conduc la găsirea, pentru evenimentul X, a probabilităţii compuse:

P'p r Pentru evitarea oricărei ambiguităţi, să numim acum şi C cele două evenimente de probabilitate Ppr şi respectiv P'p. Evenimentul A, care ne interesează şi a cărui probabilitate am notat-o cu *p* " este următorul: obţinerea unei bile roşii, indiferent de urna aleasă iniţial. E clar că şi C se exclud (dacă am ales urna o, cealaltă urnă nu intervine, şi reciproc). Rezultă că:

f, = *PPR* + *P'p r*, de unde, înlocuind literele prin valoarea lor:

40

Răspunsul e diferit de cel al primei probleme: *nu este acelaşi lucru* dacă amestecăm conţinutul celor două urne sau dacă le lăsăm intacte, fără să avantajăm pe vreuna din ele.

A treia problemă. Până acum am admis de fiecare dată că un eveniment K a avut loc şi că suntem în căutarea probabilităţii de a se produce una din *consecinţele* sale L (aleasă dintre toate eventualităţile posibile L, L, L"...). Strict vorbind, aceasta este o previziune (parţială) a viitorului.

Dar e de asemenea posibil să „atacăm" problema în *sens invers* [3]. Ne plasăm în momentul de timp când evenimentul rezultant L 5-a *produs efectiv1*. El poate să succeadă diverselor evenimente antecedente K, K, K"... şi ne întrebăm care este probabilitatea ca unul dintre ele (K, de exemplu) să fi avut loc. Nu mai este vorbă acum de

probabilitatea consecinţelor, ci de prob*abilitatea antecedentelor2: în* mod simetric, este vorba de o reconstituire (parţială) a trecutului.

1 Sublinierea noastră (*N.T.*).

2 Se vorbeşte mai des despre „probabilitate a cauzelor", dar cuvântul. cauză" ridică grave obiecţii din punct de vedere ştiinţific [26] şi este preferabilă evitarea lui. Expresia „probabilitate a ipotezelor" nu este suficient de obiectivă.

DOUĂ URNE BINARE: PROBABILITATEA ANTECEDENTELOR

Repetând cuvântul „parţială", subliniem că, în ambele cazuri, ne ocupăm de legi de probabilitate şi nu de relaţii funcţionale, în sensul determinismului clasic.

Nu trebuie decât „*să întoarcem pe dos*" cea de-a doua problemă, pentru a calcula probabilitatea uneia dintre cele două antecedente posibile (se poate generaliza cu uşurinţă la cazul unui număr oarecare de antecedente). Să păstrăm aceleaşi notaţii.

Cele două antecedente (care se exclud) sunt: „extragerea din urna CB" şi „extragerea din urna CB". Am folosit una din urne, dar nu ştim care. A ieşit o bilă roşie. Care e probabilitatea *ty* ca bila roşie să fi fost extrasă din urna C3?

Datorită discuţiei preliminare detaliate cu grijă, soluţia este imediată:

numărul cazurilor posibile e proporţional cu probabilitatea *p r* a evenimentului notat cu A (obţinerea unei bile roşii, indiferent de urna aleasă) în acelaşi fel în care numărul cazurilor favorabile e proporţional cu probabilitatea *Ppr* a evenimentului notat cu X, apoi cu B (extragerea unei bile roşii din urna CB)

Nu ne mai rămâne decât să ţinem seama de definiţia probabilităţii şi să înlocuim, la numitor, *p r* prin valoarea sa scrisă mai înainte, pentru a obţine formula fundamentală1:

r + *P'pe*

Cu datele noastre numerice, găsim:

1/8 = A = O, 29412...

17/40 17

Bineînţeles, probabilitatea ca bila roşie să provină din urna CB

este:

= l Ş = i? = O, 70588…

17

A patra problemă. Această ultimă problemă se grefează pe cea precedentă, scoţând în evidenţă întreg interesul pe care îl prezintă.

1 Cunoscută sub numele de *formula lui Bayes* (*N.T.*).

DOUĂ URNE BINARE: PROBABILITATEA ANTECEDENTELOR

Am extras o bilă roşie din una din cele două urne; *ştim* că extragerea s-a făcut din urna din dreapta, de exemplu, dar *nu ştim* dacă ea are compoziţia (*B* sau <3. Totuşi putem profita de cunoaşterea lui ts: punem la loc bila în urna din care provine, amestecăm bilele în ea şi efectuăm o nouă extragere din *această urnă* (cea din dreapta). Vom extrage o bilă roşie cu o probabilitate p –, care acum este [*3*]:

ceea ce ne dă:

— $) p;

340

un al treilea rezultat care diferă de primele două.

Acesta este, schematizat la maximum, principiul estimării eventualităţilor viitoare în conformitate cu evenimentele constatate, ceea ce nu este decât *adaptarea comportamentului omului la circumstanţele exterioare*; în particular, discutarea şi utilizarea statisticilor se bazează pe raţionamente de acest gen, pe „împletirea" probabilităţilor în cascade.

Pentru a face mai vii aceste consideraţii, puţin cam abstracte prin natura lucrurilor, le vom ilustra prin două exemple – unul, pur şi simplu frapant, celălalt, de un interes mai general – datorate unor mari savanţi.

Joc ceartă cu un necunoscut. Prima dată când el împarte cărţile, întoarce un „Popă". Care e probabilitatea antecedenţei: „partenerul meu este un trişor"? [38]. Soluţia, asupra căreia nu vom insista, presupune concursul psihologiei şi al matematicii, care furnizează primele elemente de apreciere.

A doua aplicaţie se referă la naşterea gemenilor [11]. Pornim de la o statistică anuală (pentru Franţa), în care găsim următoarele date:

Doi băieţi… 2 933

Două fete… 2 797

Un băiat şi o fată… 3 188

8 918 naşteri

DOUĂ URNE BINARE: PROBABILITATEA ANTECEDENTELOR S

Problema care se pune este de a căuta probabilitatea următoarelor două eventualităţi: care e probabilitatea ca sexul unuia din gemeni să fie determinat de sexul celuilalt? care e probabilitatea ca cele două sexe să fie complet contingente („datorate hazardului")?

Desigur, nu vom detalia calculele, dar vom arăta cum problema poate fi adusă la o „problemă cu urne": o urnă binară

O (*r*; *n*), în care bilele roşii R reprezintă băieţii şi bilele negre N fetele, este, la fiecare probă, supusă unor extrageri duble (urmată de punerea la loc a bilei); rezultatul fiecărei extrageri aparţine uneia din cele patru categorii:

RR RN NR NN;

rezultatele sunt notate1 de cineva care ne ajută, care uneori e distrat (în loc să asculte care e culoarea celei de-a doua bile extrase, el scrie a doua oară aceeaşi literă). Recenzăm cele 8 918 înregistrări, care se repartizează după tabelul de mai sus, şi dorim să cunoaştem care e proporţia cazurilor în care cel ce ne-a ajutat a fost neatent?

Cititorul a sesizat probabil că „neatenţia celui ce ne ajută" este sinonimă cu „corelaţie maximă". Rezultatul e următorul:

O, 28501 = probabilitatea unei simultaneităţi riguroase, O, 71499 = probabilitatea unei independenţe totale, adică în 71 şi jumătate dintr-o sută de cazuri, sexul celui de al doilea geamăn e acelaşi ca şi la o naştere simplă. Matematica ne învaţă care e probabilitatea în cazul în care intervine *doar hazardul*. Ea nu ar putea să meargă mai departe, dar ghidează cercetările către o concluzie practic certă, care nu se poate obţine, în fiecare compartiment al cunoaşterii, decât prin *metode proprii* ştiinţei respective.

Probabilitatea antecedentelor joacă, în viaţa practică, un rol pe

care marea majoritate a oamenilor instruiţi e departe de a o bănui.

Ne vom mărgini aici la două exemple.

4 (DOUĂ URNE BINARE: PROBABILITATEA ANTECEDENTELOR

Având la îndemână cunoştinţele actuale ale psihiatriei, istoricul se poate întreba care era cauza unei boli mintale a cutărui personaj celebru. Extrăgând note din texte, el va evalua, de exemplu, probabilitatea ca această boală să fi fost consecinţa ravagiilor treponemei, sau o psihoză maniaco-depresivă congenitală.

Un criminalist (de bună-credinţă, se înţelege) trebuie, după descoperirea unui cadavru, să stabilească care sunt probabilităţile pit *p2* şi *Ps*

ca decesul să fie datorat unui accident, unei sinucideri (cu sau fără punere în scenă) sau unui asasinat. Dacă respectiva persoană trăia în condiţii favorabile (din dublul punct de vedere social şi sanitar) şi dacă un accident este improbabil, probabilitatea *p3* e foarte aproape de unitate. Dacă, dimpotrivă, examinarea vieţii defunctului revelează antecedente enigmatice (cum ar fi o existenţă dublă, încurcături financiare, acţiuni regretabile…) în timp ce p1 e din nou foarte mică sau nulă, probabilitatea predominantă e în mod necesar p2.

9

ADEVĂRATUL PREŢ AL ŞANSEI: SPERANŢA MATEMATICĂ, VALOARE MEDIE

Noţiunea fundamentală de probabilitate nu e singura care intervine în studiul hazardului. De ce este aşa, vom vedea imediat, examinând aruncarea cu un zar.

Cu condiţia de a impune garanţii analoage cu cele pe care le-am detaliat relativ la aruncarea cu banul, cele şase „puncte" obţinute aruncând un zar sunt evenimente echiprobabile [27]; probabilitatea fiecăruia dintre ele este 1/6. Dar nu fiecare punct are aceeaşi *utilitate*; cititorul ştie, de exemplu, că la jocul de table, punctele mari sunt aproape totdeauna mai utile. Acestea fiind spuse, să ne propunem să calculăm numărul de puncte pe care îl aduce în *medie* fiecare aruncare a unui zar. Acest număr este evident:

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 7 o. –…

m = – = – = 3 puncte şi jumătate 6 2

(adică suma celor şase „utilităţi" posibile, împărţită prin numărul eventualităţilor). Putem scrie pe în sub forma:

unde diverşii *e* sunt fracţii cu acelaşi numitor (şase) şi al căror numărător este utilitatea respectivă (1; 2; 3; 4; 5; 6). Astfel, pentru faţa CINCI, avem:

5

acest număr e numit *speranţă matematică* a feţei CINCI; ea se obţine prin *înmulţirea* utilităţii, care este egală cu 5, cu probabilitatea 1/6.

În general, se numeşte „speranţă matematică" a unui eveniment oarecare produsul dintre utilitatea şi probabilitatea sa. Definiţie absolut naturală, de vreme ce interesul pe care

ADEVĂRATUL PREŢ AL ŞANSEI

Îl purtăm unui eveniment aleator este cu atât mai mare cu cât acesta e în *acelaşi timp* mai folositor şi mai probabil.

Această noţiune ar putea, la primă vedere, să pară o nouă complicaţie. Da, dar complicaţie care simplifică: calcularea speranţei matematice nu ridică dificultăţi de genul celor pe care le-am întâmpinat în manipularea probabilităţilor.

Astfel, cititorul a remarcat că valoarea medie în a unei probe este pur şi simplu egală cu suma speranţelor matematice ale tuturor eventualităţilor care pot surveni.

Locuţiunea „speranţă matematică" constituie un bloc inseparabil, un fel de cuvânt compus, căruia nu i se pot disocia elementele; într-un anume sens, ea este valoarea numerică a speranţei, „adevăratul preţ al şansei" [15]. Această locuţiune păstrează pecetea originii calculului probabilităţilor, căruia Blaise Pascal şi Pierre de Fermat i-au pus bazele în prima jumătate a secolului al XVII-lea, tocmai meditând asupra jocurilor de noroc1. Iată încă două comentarii interesante: ea este speranţa noastră de a obţine maximum posibil, temperată sau diminuată de teama de ceea ce este mai rău, aşa încât valoarea aşteptărilor noastre e ceva intermediar între „foarte binele" pe care îl sperăm şi „foarte răul" de care ne este frică [4]. Speranţa

matematică reprezintă valoarea echitabilă a avantajelor (pozitive şi negative) încă incerte a evenimentelor ce se vor produce [5].

Speranţa matematică nu e un număr „pur" (sau, mai bine zis, un raport) ca probabilitatea; ea se exprimă în aceleaşi unităţi ca şi „utilitatea" pe care o reprezintă. Am văzut deja că ea poate fi un număr de puncte; vom vedea mai târziu că poate fi şi un număr de probe, în cazul pariurilor sau al jocurilor de bursă, ea este un număr de franci (câştigaţi sau pierduţi).

Dacă certitudinea este o varietate particulară de probabilitate, trebuie să referim să dăm crezare afirmaţiei inverse: o speranţă matematică, exprimată prin /" franci, nu are nimic

1 Cititorul poate g jsi detalii despre primele probleme care au dat naştere calculului probabilităţilor, în cartea lui Renyi, citată şi mai înainte, în capitolul „Prima scrisoare", în această carte, în „Note introductive", există o scurtă biografie a lui Fermat, iar în „Anexă", date despre Pascal şi despre istoria calculului probabilităţilor (*N.T.*).

comun cu certitudinea de a câştiga /" franci. Ne putem da seama cu uşurinţă de acest fapt pe un exemplu concret [8J: dacă avem o şansă din zece de a câştiga 200 de franci, speranţa matematică (pozitivă) este de 20 de franci. Aceşti 20 de franci nu reprezintă altceva decât suma pe care *este echitabil* să o dăm oricui ar accepta să ne ia locul. Dar aceşti 20 de franci nu sunt câtuşi de puţin o valoare posibilă a câştigului: singurele valori posibile ale câştigului sunt o franci şi 200 de franci.

Consideraţii de acest gen intervin în viaţa de fiecare zi, sub o formă vagă şi abia conştientă: trebuie, de exemplu, să alegem între a accepta şi a nu accepta un risc. Astfel, a avea o şansă din două de a încasa 1.000 de franci echivalează „matematic" cu 500 de franci. Dar unii vor prefera să rămână cu cei 400 de franci din buzunar, iar alţii vor cumpăra bucuroşi această şansă cu 600 de franci. Cine greşeşte? cine procedează corect? Pentru a decide, te simţi tentat să „scormoneşti" în acest arsenal de maxime puerile şi „oneste", pe care generaţiile şi le transmit cu pioşie, botezate „înţelepciunea naţiunilor".

Parcă şi auzi dialogul:

— Mai bine economiseşte decât să rişti.

— Cine nu riscă nu câştiga.

— Dacă ai îndoieli, abţine-te. Etc.

Două anecdote [11] ne vor oferi o vedere de ansamblu asupra combinării judicioase a argumentelor matematice şi psihologice:

1. *Refuzarea unui pariu avantajos*. René, care are 100.000 de franci, se întâlneşte cu un original, imens de bogat, care îi propune – cu toate garanţiile posibile – să joace cei 100.000 de franci ai săi contra un milion, pe o singură aruncare a banului. Dacă el consimte, speranţa matematică totală este:

l ooo ooo 100 ooo *2*

adică 450.000 de franci. Niciun matematician serios nu va pretinde totuşi că trebuie acceptată această ofertă; ba chiar mulţi dintre ei o vor declina, şi încă din motive temeinice1.

1 Decizia ar putea să fie inversă, dacă „originalul" i-ar propune lui René să joace 100 de franci contra 1.000, în aceleaşi condiţii.

se

ADEVĂRATUL, PREŢ AL ŞANSEI

2. *Acceptarea unui pariu dezavantajos*. Alphouse se află într-o regiune îndepărtată, singur, fără cunoştinţe; el e foarte bogat şi va primi mâine o importantă sumă de bani; dar el are motive puternice să se urce pe un pachebot care pleacă peste o oră şi la care biletul costă 800 de franci, în timp ce el nu are acum decât 600 de franci. Un „descurcăreţ", căruia el i-a povestit dificultăţile sale financiare, îi propune, „pentru a-l îndatora", să joace la aruncatul cu banul cei 600 de franci contra 400. Speranţa matematică totală este:

400 2

600

= – 100 de franci;

dacă el consimte, va schimba certitudinea de a-şi păstra cei 600 de franci (provizoriu neutilizabili) cu „teama" matematică de a pierde 100 de franci. Oricine va fi de acord că este avantajos pentru Alphonse să accepte.

Tot astfel, cu toţii acceptăm pariuri dezavantajoase, cel puţin cumpărătorii de bilete la Loteria Naţională, înfiinţată în 1933, „imoralitatea" loteriei a fost denunţată în termeni viguroşi de toate guvernele franceze care s-au succedat de atunci şi până azi; dar toate au conservat cu sfinţenie această instituţie. Greşeala lor n-a constat poate în menţinerea ei; ci, mai degrabă, în faptul că mai întâi au tunat şi fulgerat împotriva ei, pentru a se dezice apoi: cercurile politice ar trebui să fie cele din urmă care să considere că îmbogăţirea pe calea lozului cel mare poate fi mai imorală decât cea datorată anumitor speculaţii [13].

Să evaluăm speranţa matematică pe care o plătim cu bani gheaţă cumpărând un bilet la Loterie. A existat o n ariaţie de necrezut a numărului lozurilor şi a valorii lor: ultima reţetă a constat în emiterea unui milion de bilete întregi (de 100 de franci fiecare), cu bilete câştigătoare în valoare totală de 60 de milioane. Media restituirilor este deci de 60 de franci pe bilet întreg; speranţa matematică totală a operaţiei este de – 40 de franci (cumpărătorul plăteşte 100 de franci pentru eventualitatea unui câştig de 60 în medie). Cu un Lilet „zecime", cumpărătorul scoate din buzunar 11 franci pentru un câştig mediu de 6 franci. Se poate totuşi afirma, în concordanţă cu majoritatea matematicienilor, că nu este cu totul nesăbuit

ADEVĂRATUL PREŢ AL ŞANSEI H

să cumperi un bilet. Căci cumpărătorului – care îşi reduce puţin din venit – nu-i pasă câtuşi de puţin dacă face o afacere bună; el e doar în căutarea unui pic de speranţă, a posibilităţii (dacă are imaginaţie) de a construi castele în Spania, a certitudinii că va fi furnicat de emoţie, ascultând sau citind lista numerelor câştigătoare [2]. Persoanele carecâştigă un loz mare consideră în general că – cumpărându-şi un bilet – au dat dovadă de înţelepciune şi spirit de previziune [11].

*

Loteria Naţională încasează deci o *t*, *umăr*, de ordinul a 40%, din care aproximativ un sfert serveşte la acoperirea cheltuielilor ei: nu este un joc *echitabil*. Acest adjectiv se referă la ansamblul de convenţii

prin care niciunul dintre parteneri nu este nici avantajat, nici lezat: jocul echitabil cel mai simplu are drept model urna-etalon

(*r*; *n*) cu 7 = n, caz în care unul din jucători pariază 10 franci, de exemplu, pe apariţia unei bile roşii, iar al doilea acceptă pariul (aruncarea cu banul cu mize egale); speranţa matematică totală a fiecăruia dintre jucători este nulă. Se ajunge la această situaţie, ori de câte ori sumele puse în joc (mizele) şi S sunt proporţionale cu probabilităţile:

l =

S l-ţi adică:

S (l-ţi) – S p = O, ceea ce exprimă faptul că jocul este echitabil (speranţa matematică totală la fiecare partidă este nulă).

Teoria abaterilor, despre care cititorul îşi va face curând o idee, e formală: dacă jucăm *indefinit* un joc – *fie el* şi *echitabil* – certitudinea de a ne ruina este *completă*, oricare ar fi capitalul disponibil. Un bancher, care ar accepta pariuri echitabile cu toţi jucătorii care s-ar prezenta, poate fi sigur că se va ruina, căci publicul nu e altceva decât un unic jucător extrem de bogat; publicul – care nu s-a ruinat niciodată – ruinează pe imprudenţii care îl atacă [5].

n

ADEVĂRATUL PREŢ AL ŞANSEI

Lucrurile nu mai stau astfel, de îndată ce jocul încetează de-a fi echitabil: un avantaj – fie el cât de mic – îndepărtează certitudinea ruinării. Făcând abstracţie de cheltuielile generale, un anume avantaj al patronului de cazinou este necesar; important este doar ca acest avantaj să nu fie exagerat [5]. Într-adevăr, stabilimentele de joc prevăd pentru fiecare partidă, o retribuţie minimă (1, 37% şi 2, 71%, după modul în care se mizează, la ruletă); caniota atinge totuşi o valoare exorbitantă (11, 11%) la extragerea bilei. Cu atât mai mult cu cât, între cazinou şi Loterie, există o deosebire esenţială: în primul caz, poţi miza de trei ori pe minut; în al doilea, nu se fac decât câteva extrageri pe lună.

Argumentul de imoralitate poate fi reluat împotriva cazinourilor şi a cercurilor deschise, dintre care unele nu sunt decât vulgare

tripouri: e lamentabil să vezi, sâmbătă seara, anumiţi oameni care îşi risipesc banii, obţinuţi prin munca de o săptămână, aşa cum adesea se întâmplă în porturi. Totuşi trebuie remarcat că, în stadiul actual al moravurilor, marile „întreprinderi ale jocului" îndeplinesc, în felul lor, o anume funcţie socială: nu numai că ele asigură existenţa unui personal important şi varsă sume mari în casele publice, dar tot ele distribuie speranţă celor umiliţi (cărora ar trebui să li se facă o educaţie pentru a nu cheltui disproporţionat) şi, mai ales, ajută pe cei bogaţi să lupte împotriva lipsei de ocupaţie (ceea ce constituie, în aceeaşi măsură ca şi alte forme de lux, un mijloc de egalizare a averilor) 1.

1 Aici – ca şi în pasajele anterioare – autorul condamnă o societate în care inegalitatea socială se agravase considerabil, în condiţiile situaţiei dezastruoase a Franţei din primele luni ale celei de-a doua conflagraţii mondiale (*N.T.*).

10

PROBE REPETATE; PROBABILITĂŢI DE APARIŢIE

Am făcut deja aluzie la probele repetate, pe care le caracterizăm aici prin faptul că un anume eveniment are mereu aceeaşi probabilitate: pentru a fixa ideile, aşa stau lucrurile în cazul unei urne, în care *se pune la loc*, după fiecare extragere, bila scoasă.

Seria de probe repetate constituie chiar miezul teoriei hazardului.

Vom începe să pregătim terenul, răspunzând la câteva chestiuni de interes absolut general.

Să reluăm pentru început urna-etalon (sau, echivalent, aruncarea cu banul):

(; n) cu / = *n*.

În conformitate cu înmulţirea probabilităţilor, probabilităţile de a extrage succesiv l 2 3 4 5… bile roşii sunt respectiv:

L – l 1 J 248 16 32".

Din motive de simetrie, acestea sunt totodată şi probabilităţile de a nu extrage decât bile negre, sau, ceea ce revine la acelaşi lucru, de a nu extrage nici*o bilă roşie* în l 2 3 4 5… extrageri.

Acum ne vom întreba care e *numărul mediu* de probe pe care trebuie să le efectuăm pentru ca să se producă o dată evenimentul: „extragem o bilă roşie".

M

PROBE REPETATE: PROBABILITĂŢI DE APARIŢIE

Acest număr mediu se va prezenta ca suma speranţelor matematice ale *tuturor* cazurilor posibile.

O dată din două, vom obţine o bilă roşie chiar la prima extragere, de unde speranţa matematică este... 1/2

Dacă eşuăm la prima extragere, o dublă extragere ne va furniza o bilă roşie o dată la fiecare patru încercări, de unde speranţa matematică este... 2/4

Primele două extrageri eşuând, o extragere triplă ne va da o bilă roşie o dată din opt daţi, de unde speranţa matematică este... 3/8

Etc.

Este suficientă puţină dexteritate pentru a însuma *într-un mod foarte simplu* toate aceste speranţe matematice, care reprezintă, fiecare, un număr (fracţionar) de probe:

1/2 1/4 1/8

1/4 1/8

1/8

1/16 1/16 1/16 1/16

1/32 1/32 1/32 1/32 1/32

TOTALURI... l + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ... de unde rezultă imediat1 că suma totalurilor parţiale este egală cu 2. Dacă un eveniment are probabilitatea 1/2, sunt necesare două probe (în medie) pentru ca el să se producă. Semnificaţia speranţelor matematice, în acest caz, apare acum cu claritate. Folosindu-ne de urna <5, ne propunem să extragem indefinit bile, până când obţinem una roşie; experienţele necesare se repartizează în diverse categorii:

1 Acest „imediat" să nu dea totuşi iluzii cititorului I Dacă însumarea pe fiecare coloană şi a totalurilor parţiale se face uşor, ţinând seama că avem de-a face cu progresii geometrice cu termeni iniţiali diferiţi şi aceeaşi raţie (1/2), în schimb operaţia de însumare

mai întâi pe coloană şi apoi pe linii (deci în ordine inversă celei iniţiale) trebuie justificată; or, această justificare presupune un bagaj cu mult mai serios de cunoştinţe matematice (*N.T.*).

O dată din două, experienţa se va încheia după o probă;

O dată din patru, vor fi suficiente două extrageri; O dată din opt, vor fi necesare trei; Etc.

Cele două probe necesare (în medie) provin prin urmare din totalul de:

1/2 experienţe cu o extragere, adică… 1/2 probe
1/4 experienţe cu 2 extrageri, adică… 1/2 probe
1/8 experienţe cu 3 extrageri, adică… 3/8 probe
TOTAL… 2 probe

E vorba de o simplă comprimare de limbaj, care are de altfel darul de a-i face pe oameni să se abandoneze unei dulci ilarităţi: 3, 6713 automobile ieşite pe săptămână din cutare uzină; O, 8058 persoane accidentate zilnic pe stradă etc. Glumele nereuşite, pe care le declanşează automat acest mod de vorbi, sunt un simptom grav de incomprehensiune şi de fatuitate.

Rezultatul pe care l-am enunţat este general: fiind dat un eveniment, a cărui probabilitate este p, numărul mediu SJL de probe pe care trebuie să le efectuăm pentru ca el să se realizeze o dată este:

cum era de aşteptat, numărul mediu de probe e cu atât mai mare cu cât probabilitatea e mai mică. Dar raţionamentul anterior rezolvă *cantitativ* problema.

Putem să mergem mai departe, ocupându-ne de un eveniment care urmează să se producă des1. Atunci trebuie să distingem două cazuri:

I. Dorim ca evenimentul să apară de t ori. Dacă evenimentul s-a produs deja o dată, trebuie să efectuăm *încă W*. probe

1 Bineînţeles că şi această problemă e tratată, impunând condiţia ca, în seria de probe care se efectuează, probabilitatea evenimentului considerat să rămână aceeaşi; sau, cum se mai spune, să

studiem o serie de probe mutual independente (*N.T.*).

56

PROBE REPETATE: PROBABILITĂŢI DE APARIŢIE

pentru ca el să se realizeze a doua oară. Şi aşa mai departe, în total, numărul mediu de probe este $> (*t*, adică *t*/*p*.

II. Problema reuşitelor *consecutive* este cu totul diferită: impunem evenimentului să se producă de mai multe ori la rând, fără nicio întrerupere (de exemplu: să extragem de 20 de ori la rând o bilă roşie din urna). Să notăm cu snumărul reuşitelor consecutive; nu avem – în această carte – pretenţia de a explica în detaliu ce se petrece în acest caz, fiind obligaţi să renunţăm la calcule matematice ceva mai complexe şi mărginindu-ne deci mijloacele de expresie la strigătul perfecţionat al maimuţelor şi al câinilor [24]. Menţionăm doar că numărul mediu M al probelor pe care trebuie să le efectuăm e dat de o formulă destul de dificil de stabilit1, dar că ne vom forma o idee destul de clară despre acest număr M în toate circumstanţele imaginabile, examinând *tabelul* 2 cu „dublă intrare".

„Modul de întrebuinţare" al acestui tabel va fi precizat prin trei exemple familiare.

a) Regăsim mai întâi (prima linie a *tabelului* 2) câteva valori ale lui 9M, numărul mediu de probe ce trebuie efectuate pentru ca evenimentul să apară o dată.

b) Linia a 4-a din coloana a 4-a ne dă

M = 1.000.000 aproximativ;

aşa stau lucrurile în cazul extragerilor la Loterie, de vreme ce fiecare cifră – care iese dintr-o bilă – are o probabilitate de apariţie am presupus *p* = *0*, *1*;

s = *6*, căci câştigul maxim se obţine pentru numere de şase cifre, în consecinţă, numărul 777 777 va ieşi în

1 Iată această formulă

M

l-pp punând *să-l*, regăsim evident. – îl = *la* = *JH*.

PROBE REPETATE: PROBABILITĂŢI DE APARIŢIE

57

s i	P – 3/4	1/2	1/4	1/10
1	(*)	2	4	10
2	3	6	20	110
4	9	80	340	11 110
6	18	12 6	5 460	1 milion
8	36	51 0	87 380	100 milioane
10	67	20 46	1 milion 1/2	10 miliarde
20	1 261	2 milioane	1.500 miliarde	100 miliarde de miliarde

(*) Mai adesea o probă decât două (exact, „patru treimi de probă").

Tabelul 2.

— Tabel cu dublă intrare dând numărul mediu M de probe pe care trebuie să le efectuăm pentru ca evenimentul aleator să se producă de a ori consecutiv, în funcţie de diversele probabilităţi *p*.

medie o dată la fiecare milion de lozuri mari. Un alt număr oarecare (de exemplu, 690 263) va ieşi exact la fel de rar [8].

c) Ultima linie din coloana a 2-a „evocă" „seria de douăzeci de ori roşu" la ruletă: probabilitatea apariţiei ROŞULUI este într-adevăr foarte apropiată de 1/2 (numărul exact este 0, 48649). O evidenţă a nenumăratelor rezultate la ruletă furnizează o *confirmare riguroasă a* calculelor matematice, *corect efectuate*: cele şase feluri de „serii de douăzeci" pot fi văzute apărând într-o perioadă de ordinul a mii de zile; se povesteşte, la Monte Carlo, că odată s-a produs „o serie de douăzeci şi nouă". Vom reveni asupra iluziilor de neclintit ale „căutătorilor de serii".

Raritatea crescândă a seriilor din ce în ce mai lungi şi caracterul constant al probabilităţii în fiecare probă sunt *două afirmaţii identice*: ele se deduc riguros una din cealaltă. A exprima îndoieli în acest sens

nu înseamnă decât să ne trădăm pe noi înşine, să dovedim că nu înţelegem nimic despre jocuri (ceea ce nu e chiar aşa de grav) şi nici despre hazard (ceea ce din păcate este cu mult mai grav).

Am spus totul despre numărul mediu de probe ce trebuie efectuate; ne vom ocupa acum de probabilitatea de apariţie, phobe repetate: probabilităţi de apariţie pe care o vom nota cu *x*, pentru a o distinge de probabilitatea matematică, pentru care rezervăm litera *p* şi pe care o presupunem invariantă de-a lungul probelor repetate („punem totdeauna la loc în urnă bila extrasă…")

Problema fundamentală care se pune e următoarea: Care e probabilitatea tt ca un eveniment (de probabilitate *p*) să se producă *cel puţin o* dată într-o serie de N probe?

Obţinem soluţia în două etape:

1. Să numim D evenimentul de probabilitate *p* şi F evenimentul contrar. D va fi, să spunem, apariţia unei bile roşii, F va fi extragerea unei bile negre, albe, galbene etc., din aceeaşi urnă, de compoziţie fixată. Evenimentului F îi corespunde probabilitatea complementară (l – p).

2. Să desemnăm apoi prin G evenimentul compus, definit astfel: „N apariţii succesive ale bilei ne-roşii". În virtutea celor spuse anterior, probabilitatea acestui eveniment G este:

(i-ţi)";

dar ce trebuie să înţelegem prin evenimentul E contrar lui G? El este evenimentul constând în „mai puţin de N apariţii succesive ale bilei ne-roşii", adică *exact* „una sau mai multe apariţii ale bilei roşii". Evenimentul E este deci acela căruia dorim să-i găsim probabilitatea tt; aceasta nu e decât probabilitatea complementară celei a lui G, ceea ce se scrie1:

Această formulă ne dă pe te, când N e fixat (şi, bineînţeles, şi p); dar ea rezolvă de asemenea problema următoare: Care e numărul N de probe pe care trebuie să le efectuăm pentru ca probabilitatea realizării *cel puţin o* dată a unui eveniment (de probabilitate p) să fie te?

Fără să insistăm asupra calculelor2, consemnăm rezultatele cele mai importante în *tabelul* 3: coloanele se referă la

1 Dacă, în această formulă, facem N egal cu *unitatea*, verificăm că probabilitatea matematică p nu e decât probabilitatea de apariţie într-o *singură* probă.

2 Cititorul, care e familiarizat cu logaritmii, va remarca imediat că N se obţine prin formula:

log (1 – 71)

N =

log (l-ţi)

PROBE REPETATE: PROBABILITĂŢI DE APARIŢIE 9*

diverse evenimente a căror probabilitate matematică este *p*, iar liniile, la probabilităţile corespunzătoare de apariţie-*n*. Să luăm un exemplu privind Loteria Naţională (coloana a 4-a, linia a 7-a). Dacă considerăm extragerile a zece cifre izolate, există 99 de şanse dintr-o sută ca, după 44 de extrageri, toate cifrele să fi apărut cel puţin o dată. Altfel spus.

IC 1	P-l /2	1/ 4	1/ 6	1/ 10	1/ 100	1/ 1.000
0,1				1	11	106
0,25		1	2	3	29	288
0,5	1	3	4	7	69	693
0,75	2	5	8	13	138	1386
0,9	4	8	13	22	230	2302
0,95	0	11	17	29	299	2995
0,99	7	16	26	44	459	4603
0,999	10	24	38	66	688	6905

Tabelul 3.

— Tabel cu dublă intrare care dă, pentru diverse probabilităţi matematice *p*, numărul N de probe ce trebuie efectuate pentru ca probabilitatea apariţiei, cel puţin o dată, a evenimentului aleator să aibă valoarea *n*.

admiţând că procedăm la 100 de serii de 44 de extrageri, trebuie să ne aşteptăm ca într-o singură serie din cele 100 să constatăm absenţa uneia din cele zece cifre (de altfel oarecare) 1.

Ultima coloană este instructivă, căci ea dezvăluie, într-un mod frapant, o proprietate generală, care se găsea şi în formulele matematice, dar într-o formă mai abstractă, mai puţin

1 Afirmaţia autorului nu trebuie luată ad literam. Se poate foarte bine întâmpla ca – curioşi fiind să încercăm această experienţă – la capătul a 100 de serii de 44 de extrageri, fie toate seriile să conţină toate cifrele, fie să remarcăm existenţa a două sau mai multe serii „defectuoase" (în care una din cele zece cifre lipseşte). Şi totuşi nu s-a strecurat nicio greşeală; sunt necesare doar unele precizări. Exemplul dat constituie o ilustrare a legii numerelor mari, care va fi prezentată cititorului în penultimul capitol al cărţii. Efectuând un număr N de serii de 44 de extrageri, proporţia de serii „defectuoase" este un număr care variază în funcţie de N, dar care se apropie de 1/100, pe măsură ce N creşte. Cu cât N este mai mare, cu atât şi respectiva proporţie este mai aproape de 1/100. Acest sens trebuie acordat frazei din text (*N.T.*).

evidentă, în ea avem de-a face cu un eveniment extraordinar de improbabil, de vreme ce probabilitatea lui este 0, 001: la prima extragere, avem o şansă dintr-o mie să scoatem singura bilă roşie dintr-o urnă care conţine şi 999 de bile de alle culori. Dar e suficient să „reînnoim" experienţa cu circa 7.000 de ori (ultima linie a ultimei coloane), pentru ca să avem cvasicertitudinea (999 şanse dintr-o mie) că măcar o dată va apărea bila roşie1, înţelegem mai bine că, din punct de vedere al hazardului, nu există nimic comun între o decizie neaşteptată şi acţiunile obişnuite ale vieţii de zi cu zi: ceea ce este neverosimil în primul caz nu mai e *câtuşi de puţin* în cel de-al doilea.

Vom încheia prin aceste remarci sugestive [34], a căror savoare cititorul o poate aprecia – acum – el însuşi. Un eveniment aproape imposibil sfârşeşte, în cele din urmă, prin a se realiza sigur, şi, totuşi, în momentul apariţiei sale, am fi fost îndreptăţiţi să îl considerăm practic imposibil. „Ce hazard nemaipomenit l Nici nu te puteai aştepta la aşa ceva!", va spune atunci un martor. „Era cert că asta trebuia să se întâmple odată şi odată…", va obiecta un altul. *Amândoi au dreptate:* evenimentul trebuia să se întâmple, dar nu put*eam prezice cind2 şi* nimeni n-ar fi fost capabil să prevadă că tocmai acum. Dacă vom reflecta bine, vom înţelege că nu este nicio contradicţie aici. A susţine contrariul ar echivala cu afirmaţia că un număr infim trebuie să rămână mic când este înmulţit cu un număr foarte mare!

1 Afirmaţia trebuie înţeleasă în acelaşi sens ca şi cea la care se referă nota anterioară (*N. T.*). * Sublinierea noastră (*N.T.*).

11

CREDINŢA ÎN COMPENSAŢIE

Suntem departe de a fi terminat cu seria de N probe repetate. Ca de obicei, vom lua drept model o urnă, presupusă oarecare:

e (*r*; *n*; *a*; *g*;…)

conţinând bile roşii (în număr de r) şi bile ne-roşii (negre, albe, galbene etc.). Vom efectua o serie de extrageri foarte numeroase (vom vedea mai departe semnificaţia pe care trebuie s-o atribuim expresiei: „foarte numeroase"). Evenimentul considerat va fi scoaterea unei bile roşii: la fiecare extragere, probabilitatea acestui eveniment este *p*; probabilitatea evenimentului contrar (scoaterea unei bile ne-roşii) e deci (l-ţi), întrebarea: „de câte ori va ieşi o bilă roşie pe parcursul a N probe?" nu *comportă niciun răspuns*. Mai precis, răspunsul va fi în *mod cert* unul din cele (N-f-l) numere:

O, l, 2… (N-2), (N-l), N, dar nu ştim care-l.

Asta nu înseamnă deloc că nu ştim nimic despre aceste (N + l) numere. Dimpotrivă, ştim o mulţime de lucruri, de vreme ce tocmai ele vor face obiectul următoarelor pagini.

Mai întâi, vom enunţa un rezultat [4] într-atât de natural încât nu va fi contestat de nimeni: dacă efectuăm un număr foarte mare *91*

de serii de N probe identice (în total deci 91

1 Acesta e un exemplu de variabilă aleatoare, noţiune la care autorul face aluzie încă la p.10. Alte exemple ar fi: numărul de zile ploioase dintr-o săptămână, înălţimea unei persoane, numărul de rebuturi din producţia unei uzine etc. în esenţă deci, o variabilă aleatoare este o mărime susceptibilă să ia anumite valori cu probabilităţi bine determinate; nu ştim – înainte de efectuarea unui experiment – ce valoare va lua respectiva variabilă aleatoare, dar ştim care e probabilitatea ca ea să ia fiecare valoare în parte (*N.T.*).

CREDINŢA ÎN COMPENSAŢIE

N extrageri) şi calculăm media1 M a acelor 91 numere obţinute (în fiecare serie) reprezentând reuşitele (apariţia de bile roşii), acest număr mediu e dat de:

Să dăm totuşi un exemplu numeric:

N = 600, p = –, 91 = 1000.000; 6

e vorba, de exemplu, de a prevedea numărul mediu de apariţii ale feţei ŞASE, când aruncăm un zar (presupus perfect omogen şi simetric) de 600 ori. Dacă efectuăm de un milion de ori această serie de 600 de aruncări, toată lumea va conveni că ŞASE va apărea în medie de 100 de ori în fiecare serie. Ar trebui să spunem: „În medie *cam* de 100 de ori"; aproximaţia e şi mai bună, dacă repetăm seria de 600 de aruncări de un miliard de ori, de o mie de miliarde de oria…

Pe scurt, raportul M/N şi numărul *p* – care e de asemenea un raport – au valori egale *la limită* (când numărul de repetiţii creşte indefinit); dar aceste două cantităţi corespund unor idei cu totul diferite:

1. *p* (probabilitatea matematică) decurge dintr-un ansamblu de condiţii *experimentale*, simple şi schematice, presupuse a fi îndeplinite înainte de a face orice tentativă de verificare (echiprobabilitatea feţelor CA ŞI PAJURĂ sau a celor şase feţe ale unui zar, compoziţia unei urne, odată luate toate precauţiile…).

2. Raportul M/N se numeşte „frecvenţă" (relativă3), proporţie a reuşitelor, sau încă probabilitate statistică. Ea se

1 Aici e vorba evident de media aritmetică (*N.T.*).

2 Acest exemplu constituie de asemenea o bună ilustrare a legii numerelor mari (*N.T.*).

3 Numărul M, care indică de câte ori s-a produs, în cursul unei serii de probe, un eveniment care ne interesează se numeşte *frecventă absolută* a acelui eveniment. Frecvenţa absolută este un număr întreg, spre deosebire de *frecvenţa relativă* (care e un număr fracţionar, subunitar), care se obţine prin împărţirea numărului M la numărul total de probe efectuate (*N.T.*).

determină printr-o *lungă serie de probe* şi formula precedentă demonstrează că, cu cât numărul de probe e mai mare, cu atât concordanţa între cele două probabilităţi e mai precisă1.

În practică, probabilitatea matematică nu poate fi totdeauna definită (de exemplu, probabilitatea ca o persoană de vârstă *x* să moară în următorul an). Remarca precedentă permite în acest caz – graţie interpretării statisticilor – obţinerea unei probabilităţi, susceptibilă de a juca acelaşi rol ca probabilitatea matematică.

Să reluăm acum seriile noastre de N probe şi să ne concentrăm atenţia *asupra uneia dintre ele*, pe care o vom scrie:

O, *1, 2*... n... (N-2), (N-l), N;

ce înseamnă litera /! pe care am adăugat-o?

Inspirându-ne din cele precedente şi reluând pentru moment aceleaşi date numerice:

p = –, N = 600, 6

I este egal cu 100. În general, *n* va desemna numărul *cel mai probabil* de apariţii al evenimentului considerat. Este clar că, aruncând de 600 de ori un zar perfect, 100 de apariţii ale feţei ŞASE sunt mai probabile decât 600 de apariţii ale aceleiaşi feţe, sau decât 150, sau, încă, decât 50.

1 Această proprietate (care este, de fapt, un caz particular al legii numerelor mari) l-a determinat pe matematicianul Von Mieses să dea o *definiţie „frecveniistă"* noţiunii de probabilitate. Eşafodarea teoriei probabilităţilor pe o asemenea definiţie nu este însă posibilă

nici din punct de vedere matematic (apărând dificultăţi matematice insurmontabile), nici filosofic (probabilitatea având un caracter obiectiv). *Modal de abordare „frecvenlist" constituie în, a adesea o modalitate de evaluare a unei probabilităţi obiective* (şi aşa trebuie înţeleasă afirmaţia care urmează în text), ca şi abordarea „subiectivistă" (*N.T.*).

«4

CREDINŢA ÎN COMPENSAŢIE

Numărul cel mai probabil al seriei este egal cu Np1 sau, cel puţin 2, învecinat cu Np.

Numărul n-are o importanţă considerabilă în toate aplicaţiile calculului probabilităţilor: *el e punctul de referinţă de la care începe orice investigaţie*.

Prima problemă care se pune în legătură cu acest număr „cel mai probabil" este căutarea probabilităţii sale pe care o vom nota cu ŞO; probabilităţile celorlalte N numere realizabile în seria de probe vor fi precizate mai târziu.

Probabilitatea ŞO depinde de doi factori: pe de o parte, de probabilitatea *p* a evenimentului în fiecare probă, pe de alta, de numărul N al probelor efectuate [33]. Expresia acestei probabilităţi e dată în subsol3; pentru a sublinia interesul ei, va fi suficient să o aplicăm în cazul cel mai simplu, când

1 în cazul în care produsul Np este el însuşi un număr întreg.

2 Dacă produsul *Np* nu e un număr întreg, atunci calculăm suma (Np + p) şi atunci:

sau (Np + p) nu e întreg şi luăm fie numărul întreg imediat inferior, dacă pe mai mic ca O, 5, fie numărul întreg imediat superior, dacă pe mai mare ca O, 5;

sau (Np + p) e întreg şi atunci există două numere de apariţii egal probabile

Np + p şi Np + pl

(Cititorul să se gândească, de exemplu, la 21 de aruncări cu banul: 11 apariţii ale CAPULUI sau 10 apariţii ale lui sunt eventualităţi care au exact aceeaşi probabilitate.)

3 Această formulă conţine doar cele patru operaţii elementare şi o extragere de radical:

Este imposibil de explicat, fără dezvoltări matematice laborioase, de ce intervine în această formulă numărul 11 = 3, 141593… Să remarcăm, în afară de simplitatea relativă a acestei formule, că ea este cu atât mai riguroasă cu cât numărul N e mai mare; dimpotrivă, ea este valabilă pentru orice probabilitate p.

[Formula dată de autor este o *formulă aproximativă*, care este adesea preferată celei exacte, fiind mai uşor de manipulat. Precizia cu care obţinem un rezultat – prin utilizarea ei – nu este influenţată de valoarea lui *p*, ci doar de N (*N. T.*) }.

CREDINŢA ÎN COMPENSAŢIE

65

Ne reîntoarcem deci la aruncarea cu banul sau la urna-etalon:

6 (*r*; *n*) cu *r* = *n*, din care efectuăm N extrageri succesive (punând la loc de fiecare dată bila scoasă). Numărul cel mai probabil de apariţii ale bilei roşii (de exemplu) este ceea ce toată lumea numeşte: „compensaţie", „echipartiţie", „echilibru", „egalitate". Căutăm deci probabilitatea o a compensaţiei exacte *după* cele N probe, „la sfârşitul partidei" 1. *Tabelul* 4 indică valorile calculate pentru diverse serii de probe; în prima coloană se află valorile obţinute prin numărătoare directă2. Eroarea comisă este mică de îndată ce N este cel puţin egal cu 20; de la această valoare înainte, ea devine din ce în ce mai neglijabilă.

N	¥O U		Eroarea relativă comisă
	Numărătoare directă	Calcul	
2	O, 5000.000	O, 5641896	12, 8 %
4	O, 3750.000	O, 3989423	6, 38%
6	O,	O,	4, 23%

	3125.000	3257275	
8	O,	O,	3, 17%
	2734375	2820954	
10	O,	O,	2, 53%
	2460937	2523132	
20	O,	O,	1, 26%
	1761971	1784124	
50	O,	O,	O, 50%
	1122752	1128379	
10	0,	0,	O, 25%
0	0795892	0797884	
20	0,	0,	O, 11%
0	0563485	0562892	
50	0,	0,	0, 05%
0	0356646	0356825	
1.	0,	0,	0, 025%
000	0252250	0252313	

Tabelul 4 – Validitatea calculelor aproximative pentru probabilitatea de compensaţie. (Cititorul va constata că eroarea este comisă totdeauna prin exces.)

1 E suficient ca în nota precedentă să înlocuim p şi (la) prin valoarea 1/2:

[Evident, şi această formulă e aproximativă (*N.T.*)].

2 O recenzare a rezultatelor este uşoară până la N = 20; această coloană a fost „prelungită". folosind o formulă exactă cu care se pot obţine – drept cazuri particulare – şi rezultatele din primele şase linii.

Dar, ceea ce este cu deosebire important de remarcat, compensaţia exactă este *din ce în ce mai rară* (da!, este corect: din ce în ce mai rară), pe măsură ce sporim numărul probelor. Să exprimăm acest rezultat sub o altă formă, luând în considerare partide din ce în ce mai lungi de aruncat cu banul (numerele medii sunt rotunjite):

Numărul de aruncări

(100)
(1.000)
(10.000)
(100.000)
(1.000.000)
50 CAP şi
500 CAP şi
5.000 CAP şi
50.000 CAP şi
500.000 CAP şi
Compensaţia exactă (În procente)
50 PAJURĂ 8 %
500 PAJURĂ 2,5%
5.000 PAJURĂ 0,8%
50.000 PAJURĂ 0,25%
500.000 PAJURĂ 0,08%

când trecem de la o partidă de 10.000 de aruncări la una de 1.000.000, numărul compensaţiilor nu sporeşte de 100 de ori, ci doar de 10 ori; proporţional, compensaţia a devenit de zece ori mai puţin frecventă.

Şi totuşi, jucătorii continuă să creadă cu încăpăţânare în *necesitatea* (!) „în cele din urmă" a unei compensaţii riguroase: această eroare de necontestat serveşte drept bază majorităţii „sistemelor" de joc, eşafodate „pentru a învinge hazardul".

Cheia enigmei va fi înţeleasă bine abia mai târziu: ea rezidă în faptul că eventualităţile imediat vecine cu compensaţia au probabilităţi cu atât mai aproape de *SŞO*, cu cât numărul N e mai mare; probabilitatea eventualităţii „de 501 ori CAP – fie 499 de ori PAJURĂ"

este cu mult mai aproape de 0, 0252 decât este probabilitatea eventualităţii „de 51 de ori CAP + de 49 de ori PAJURĂ" de 0, 0798. Spre deosebire de compensaţia riguroasă, compensaţia *aproximativă* se realizează din ce în ce mai bine, când partida se prelungeşte; dar o compensaţie aproximativă nu îi interesează pe jucători, căci, pentru ei, matematica este o ştiinţă „serioasă" doar în măsura în care le furnizează adevăruri absolute… şi conforme cu prejudecăţile lor.

CREDINŢA ÎN COMPENSAŢIE «7

Credinţa într-o compensaţie riguroasă vine deci să se suprapună sofismelor despre care am vorbit deja: negarea independenţei probelor succesive (când fiecare dintre ele poate fi asimiiată cu o extragere dintr-o urnă, urmată de punerea la loc a bilei); confuzia între viitor şi trecut (care „gratifică" cu o probabilitate diferită de unitate un eveniment care a avut deja loc).

Sistemele de joc, martingalele se sprijină pe credinţa într-o compensaţie strictă. De exemplu, ne consacram timpul acestei ocupaţii *inutile*, care este înregistrarea unei suite de opt rezultate consecutive la ruletă, suită în care ROŞU a apărut de cinci ori şi NEGRU de trei ori. Mulţi vor spune: „Legea numerelor mari (?) *cere* (?) ca în zece (?) jocuri nici ROŞU, nici NEGRU să nu fie favorizate. Vom proceda deci *înţelept* (?) mizând pe NEGRU la cel de-al nouălea şi al zecelea joc". Nu e de mirare că orice martingală se termină cu pierderi însemnate…

În consecinţă, cu certitudine, 99 de oameni instruiţi din 100 vor pretinde că, dacă a ieşit de cinci ori la rând CAPUL (de exemplu), PAJURA are „nitel mai multe şanse" să apară la următoarea aruncare cu banul 1. Această iluzie nu poate rezista la *cronometrarea* unei partide de aruncat cu banul de şase ori, începută la ora 16 şi terminată la 16 şi 6 minute.

a) La ora 16, seria

CCCCC

are o şansă din 32 de a apărea, în timp ce toate celelalte eventualităţi (cum ar fi CPCPP) la un loc au o probabilitate de 31/32.

De asemenea, tot la ora 16, seria cecccc are o şansă din 64 de a se realiza. „Vedeţi şi dumneavoastră, vor replica sofiştii noştri, că o

serie de şase reuşite e cu mult

1 Nu poate fi invocat rezultatul indicat la sfârşitul capitolului 6, căci el nu se aplică decât unui eveniment, despre a cărui probabilitate „u *ştmnttnic*. Dacă n-am cunoaşte echiprobabilitatea CAPULUI şi a PAJURII, o serie „de cinci ori CAP" ne-ar determina să prevedem apariţia CAPULUI (şi nu a PAJURII) la cea de-a şasea aruncare!

68

CREDINŢA ÎN COMPENSAŢIE

mai rară decât una de cinci l „Da, dar ei uită că (tot la aceeaşi oră), eventualitatea

CCCCCP

are şi ea tot o probabilitate de 1/64.

b) La ora 16 şi 5 minute, opozanţii cu pricina vor repeta acelaşi raţionament, atribuind aceeaşi probabilitate de 1/32 seriei „de cinci ori CAP", *care s-a realizat*, când de fapt, acum (la 1605) nu mai e vorba de probabilitate, ci de certitudine (probabilitatea egală cu unitatea). Să punem între paranteze seria deja apărută. La 1605, probabilitatea evenimentului

(CCCCC) C

este 1/2; aceeaşi e probabilitatea seriei

(CCCCC) P.

O serie de şase reuşite e desigur mai rară ca una de cinci; dar, dacă am realizat cinci reuşite succesive, *ce-a fost greu* în obţinerea unei „serii de şase" a fost deja făcut.

c) La 1608, toate seriile precedente au o probabilitate egală cu unu (certitudine).

Cu argumente de genul celor pe care le denunţăm, un filosof [1] a pretins că a demonstrat cum că „binele" şi „răul" se compensează exact şi că ele au asupra fiecărui om efecte echivalente! Când Sancho Panza se plânge lui Don Quijote că – fără încetare – e urmărit de cele mai dureroase necazuri, ingeniosul cavaler îi răspunde că îndelungata mizerie nu e decât semnul precursor al unei apropiate bune stări, *căci*, adaugă el – norocul fiind schimbător – nenorocirile noastre au durat *prea* mult, pentru ca să nu facă loc în curând unei fericiri radioase…

Aruncarea cu banul e un subiect atât de generos că el singur ar putea constitui obiectul unui curs la Facultatea de ştiinţe… Limitându-ne doar la esenţial, trebuie să mai spunem câteva lucruri despre compensaţie.

Cele anterior expuse (şi în particular valorile lui P0) se referă la echipartiţia la sfârşitul partidei, la compensaţia *reziduală*. Dar e important să examinăm ce se întâmplă pe parcursul partidei, să studiem compensaţiile *intermediare*. Deci ne vom interesa de valoarea medie Mn a numărului de

CREDINŢA ÎN COMPENSAŢIE (9

compensaţii (întoarceri la zero1) *de-a lungul* a N aruncări cu banul dintr-o partidă lungă.

Raţionamentul ar necesita mai multe pagini, dar rezultatul este de o simplitate remarcabilă (pentru p = l/2): numărul mediu2 al compensaţiilor (inclusiv compensaţia de la începerea jocului) este egal cu produsul NP0; deci numărul mediu de compensaţii intermediare (întoarceri la o egalizare a pierderilor şi câştigurilor) e dat de produsul N? O din care scădem unu3.

Calculul se poate face mintal, utilizând *tabelul* 4. De exemplu, pentru N = 1.000, obţinem 25, 2 compensaţii, deci 24, 2 întoarceri la zero. De asemenea, pentru N = 100, găsim 7, O întoarceri. Dat fiind că 24 nu e nici pe departe de zece ori mai mare ca 7, rezultă că nu avem dreptul să scindăm arbitrar o partidă de un milion de aruncări, de exemplu: această partidă nu poate fi confundată nici cu

10.000 de partide de 100 de aruncări nici cu 1.000 de partide de 1.000 de aruncări;

ea e pur şi simplu o partidă de un milion de aruncări.

Erorile provin în acest caz din confundarea valorii medii cu o valoare exactă şi fixă, adică a probabilităţii cu o certi

1 Situaţia poate fi „vizualizată" prin următorul grafic. Pe o axă orizontală se înscriu – la distanţe egale – momentele de timp, iar la fiecare moment se marchează pe verticală un punct a cărui distanţă de axa orizontală e proporţională cu câştigul unuia dintre jucători în acel moment (dacă el este în pierdere, punctul se va afla sub axa

orizontală). Unind între ele punctele astfel obţinute, avem în faţă evoluţia câştigurilor şi pierderilor acelui jucător. Ori de câte ori linia poligonală desenată intersectează axa orizontală, se înregistrează „o *întoarcere la* zero", o egalizare a câştigurilor şi pierderilor sale până la momentul respectiv (*N.T.*).

2 Care este, aşa ştim, o speranţă matematică.

3 Ceea ce ne dă:

„2N – 7 t

4 Trebuie remarcat că problema împărţirii echitabile a banilor, în cazul unei partide întrerupte înainte de momentul iniţial stabilit de parteneri, este una din cele două probleme prezentate spre rezolvare de către cavalerul de Merrd lui Pascal, probleme care au semnat „actul de naştere" al teoriei probabilităţilor (*N.T.*).

tudine1. Să presupunem, de exemplu, că după 50.000 de aruncări, CAPUL a apărut de 25 050 de ori, iar PAJURA de 24 950, ceea ce este perfect normal; PAJURA a fost „ghinionistă" şi, rămânerea sa în urmă" nu e uşor recuperabilă, aşa încât, în următoarele câteva mii de probe, nu se va produce *nicio* întoarcere la compensaţie. Ceea ce dovedeşte, o dată în plus, că neregularităţile sunt cu mult mai mari decât îşi imaginează inventatorii de martingale, care au drept bagaj matematic doar ceva antrenament în aplicarea regulii de trei simplă.

În sfârşit putem să determinăm durata medie a unei partide de aruncat cu banul, pe care doi parteneri o joacă cu convenţia de a nu o întrerupe înainte de prima întoarcere la compensaţie („durata medie" e sinonim cu numărul mediu 91 de aruncări). Calculele sunt cam de aceeaşi natură cu cele de la pagina 66, dar rezultatul este extraordinar: găsim că 91 e absolut sigur infinit! Un jucător – care este autorizat de adversarul său „să-şi impună punctul de vedere" (adică să oprească jocul la primul său câştig) – nu e *absolut* sigur că va fi în câştig *măcar o dată*. Foarte des el va câştiga *o* miză, dar, cum trebuie să joace indefinit, va sosi momentul când el va fi în deficit pe parcursul a *numeroase* aruncări şi când va vedea ducându-se pe gârlă toate

câştigurile sale anterioare (şi pe deasupra, şi capitalul său). Naivii îşi închipuie că teoria probabilităţilor neagă cazurile excepţionale; nu numai că ele nu sunt contestate, dar *e prevăzută* chiar şi frecvenţa lor; matematica „s-ar înşela" dacă aceste cazuri excepţionale nu s-ar realiza.

O anecdotă ingenioasă [11] demonstrează că „Se-ntâmplă şi-adevărul să fie necrezut" [6]; cele două milioane de parizieni adulţi se grupează doi cita doi şi încep mâine dimineaţă să arunce cu banul, în ritm de o aruncare la fiecare trei secunde, vreme de opt ore pe zi (ceea ce înseamnă aproximativ 3 milioane de probe pe an). Fiecare cuplu a convenit să încheie jocul, îndată ce cei doi adversari vor fi chit. Ce se va petrece?

1 Suntem îndreptăţiţi să spunem că o anumită probabilitate este de 100% (certitudine), dar ce semnificaţie ar avea o certitudine (de 100%) care valorează doar 95%?

Peste şase secunde, aproape 500.000 de cupluri vor fi terminat partida lor şi îşi vor putea vedea de treburi. Numărul total al partidelor neterminate va fi aproximativ

375.000 după douăsprezece secunde, 312500 după optsprezece secunde, 273 400 după douăzeci şi patru de secunde etc.

Dar acest „etc". ascunde mari primejdii! într-adevăr trebuie să ne imaginăm că peste *treizeci de ani* vor mai fi încă o sută de cupluri care n-au terminat partida şi că după 3.000 de ani (treizeci de secole), dacă jucătorii au încredinţat continuarea partidei urmaşilor lor, vreo zece partide vor fi încă în plină desfăşurare, căci unul dintre parteneri (sau reprezentantul său) nu *va fi încetat de a fi în pierdere* în decursul a treizeci de secole de aruncat cu banul (tot timpul, în ritmul de douăzeci de aruncări pe minut, câte opt ore pe zi) I Acei nenorociţi, care vor fi murit „la datorie", vor fi luat cu ei în mormânt certitudinea de nezdruncinat că acea compensaţie – în care toţi oamenii cred orbeşte – nu e decât o glumă sinistră!

Trebuie deci să nu ne încredem în acel instinct obscur pe care îl numim „bun-simţ" [38]: el serveşte cel mult pentru *o primă luare de contact* cu situaţiile cele mai simple [9].

12

CELE PATRU SFERTURI ALE UNEI SERII DE PROBE

Vom continua acum aprofundarea studiului început la pagina 75, fără să pierdem din vedere o observaţie capitală: două serii, care se termină cu acelaşi „bilanţ", sunt *identice* din punctul de vedere pe care îl adoptăm; nu ne interesează *ordinea cronologică* a reuşitelor.

Graţie înserării numărului celui mai probabil n de apariţii ale unui eveniment într-o serie de N probe repetate:

O, l, 2... (nu-l), n, (n + 1) ... (N-2), (N-l), N, am împărţit această mulţime de (N + 1) numere experimentale în două *jumătăţi. Jumăta*tea din dreapta conţine ecarturi*1 pozitiv*e (aranjate după valorile lor crescătoare):

l, 2... (N-n), jumătatea din stânga, ecarturi negative (înregistrate în ordinea lor descrescătoare):

— N, – (nu-l), – (n-2) ... – 2, – l;

din punct de vedere al numărului de apariţii, *n* însuşi corespunde unui ecart *nul*. Ca să nu luăm în considerare o a treia categorie de ecarturi, vom admite – ceea ce este absolut natural – că n/2 apariţii au abaterea-o şi n/2, abaterea – O. Noţiunea de abatere e una din cele mai intuitive cu putinţă. Să presupunem că în 1.000 de aruncări cu banul, CAPUL a apărut de 507 ori (şi PAJURA de 493 de ori), eventualitate deloc excepţională2. Cum (500 C + 500 P) e valoarea cea mai

1 în limba română, se folosesc la fel de frecvent termenii „*ecart*" şi „*abatere*"; În continuare vom face alternativ uz de ambii termeni (*N. T.*).

2 Probabilitatea acestui rezultat e aproximativ O, 3 (30%); determinarea probabilităţii fiecărei abateri individuale o vom trata mai târziu.

CELE PATRU SFERTURI ALE UNEI SERII DE PROBE

probabilă, vedem că abaterea CAPULUI este + *7*, iar abaterea

PAJURII, – *7*. Constatăm de asemenea că, dacă jucătorii pariază un franc la fiecare aruncare, Prosper, care a mizat pe CAP, va primi 507 franci şi îi va da 493 lui Fabien, care a „mers" pe PAJURĂ. Prosper va realiza un beneficiu de 14 franci; Fabien va suferi o pierdere de 14 franci. Abaterea reziduală într-o partidă de aruncat cu banul (indiferent de numărul de aruncări) nu e altceva decât jumătate din suma achitată la sfârşitul partidei.

Să ne îndreptăm atenţia către una din cele două jumătăţi *ordonate* ale seriei de probe, de exemplu asupra ecarturilor pozitive (fiind de la sine înţeles că aceleaşi consideraţii sunt valabile şi pentru ecarturile negative). Cu convenţiile făcute, vom scrie aceste ecarturi:

(1/2 O), l, 2... (A l), h, (*A* + l) ... (N-n), desemnând prin h un ecart oarecare. (Astfel, în exemplul numeric anterior, avem: p – 1/2, *N* = 1.000, h-7, N – n = 500). Prima, şi desigur cea mai importantă, problemă pe care ne-o punem este următoarea: care e probabilitatea p pentru ca un ecart h să fie depăşit? Altfel spus: care e probabilitatea p ca să obţinem una oarecare din următoarele abateri:

(A + l), (A + 2) ... (N-n);

aceasta înseamnă că, în exemplul precedent, considerăm probabilitatea totală a tuturor ecarturilor:

7, 8... 499, 500.

Această problemă, *foarte dificilă* [33], poate fi înţeleasă, în linii mari, datorită unor consideraţii accesibile; trebuie totuşi să facem un raţionament suficient de general (literal şi nu exclusiv numeric).

Probabilitatea p depinde evident de trei factori: 1. De probabilitatea *p*, la fiecare probă, a evenimentului considerat (probabilitate care e presupusă *stabilă*, adică aceeaşi la fiecare probă; seria de probe se spune că este „uniformă");

CELE PATRU SFERTURI ALE UNEI SERII DE PROBE

2. De numărul total N de probe (N fiind un număr mare) 1;

3. De valoarea *h a* ecartului care ne interesează.

Să ne debarasăm întâi de primii doi factori, în acest scop, vom înlocui ecartul *h* printr-o cantitate auxiliară, mai generală, utilizabilă în *orice problemă* pe care ne-o punem; vom nota cu *k* această mărime

auxiliară2 şi o vom numi „ecart redus" 3 (nu este indispensabil aici să explicăm de ce).

Iată cum stau lucrurile: cunoscând pe p, N şi h, calculăm valoarea ecartului redus *k*, ceea ce nu presupune decât operaţii aritmetice elementare şi o extragere de rădăcină pătrată. Calcularea probabilităţii p de a depăşi pe *h* este astfel redusă la determinarea probabilităţii p de a depăşi valoarea corespunzătoare a lui *k*.

Relaţia existentă între p şi *k* se exprimă printr-o funcţie „transcendentă", în sensul precis pe care matematica îl conferă acestui termen; ea e transcendentă şi în sensul comun al cuvântului şi nici măcar nu intenţionăm s-o transcriem în această lucrare [10]. Ne vom mulţumi să dăm două tabele numerice (*tabelele 5* şi 6), care permit o precizie foarte bună4 şi o diagramă (*fig*. 1), care „se adresează" ochilor.

Descrierea lor şi a modului lor de întrebuinţare e plină de învăţăminte.

1 Ştim că pentru valori mici ale lui N, înregistrarea directă ne conduce la rezultat. * Am pus:

2PNP (l-ţi) Faptul că în expresia lui A: apare factorul
2/1 + 1
adică A-j
2
se explică prin înserarea convenţională a termenului (1/2 O) [22].

[După cum bine se observă din formulă, nu e vorba de o „debarasare" de factorii p şi N, ci doar de o „camuflare" a lor. Cunoaşterea lui p şi N (presupuşi fixaţi în exemplul de aici) permite oricând calcularea lui *k* în funcţie de *h* şi invers (*N.T.*).]

— Sau „abatere redusă" (N.T.).

4 Valorile intermediare se obţin prin regula de trei simplă (calcul prin interpolare).

Vom începe cu examinarea primelor două coloane din *tabelul* 5.

Observăm că, atunci când *k* variază între o şi *3, 7*... probabilitatea p descreşte de la 1/2 la 1/10.000; ultimele două coloane ale tabe*lului 6 s*ugerează o remarcă analoagă.

A douăsprezecea linie a celor şase coloane e scrisă cu caractere aldine, căci ea conţine valoarea cea mai interesantă (1/4) a probabilităţii p. Valoarea corespunzătoare a lui *k* va fi notată k; ea se numeşte, în mod natural, ecart redus

REPARTIŢIA NORMALĂ A ECARTURILOR (ÎNTR-UN SENS) pentru un număr mare de probe repetate					
Ar pentru valori simple ale lui p			p pentru valori simple ale lui *k*		
k	P	I/k	A-/k	P	*k*
0,00.000	O,5.000	0,0.000	O.000	O,50.000	0,00.000
0,01253	O,4950	0,0186	0,050	O,48655	0,03372
0,02507	O,4900	0,0372	O,100	O,47311	0,06745
0,06271	O,4750	0,0930	O,150	O,45971	0,10117
O,12537	O,4500	0,1859	O,200	O,44635	0,13490
O,18192	O,4250	0,2804	O,250	O,43305	0,16862
O,25335	O,4.000	0,3756	O,33...	O,41110	0,22483
O,31864	O,3750	0,4724	O,500	O,36797	0,33724
O,38533	O,3500	0,5700	O,66...	O,32648	0,44966
O,45375	O,3250	0,6727	O,750	O,30648	0,50587

0, 52440	0, 3.000	0, 7775	0, 900	0, 27191	0, 60674
0, 67449	0, 3500	1, 0.000	1.0 00	0, 25.000	0, 67449
0, 84161	0, 2000	1, 2478	1, 250	0, 19960	0, 84311
1, 03643	0, 1500	1, 5366	1, 500	0, 15584	1, 01173
1, 14965	0, 1250	1, 7045	1, 750	0, 11900	1, 18036
1, 28160	0, 1.000	1, 9001	2.0 00	0, 08868	1, 34898
1, 43837	0, 0750	2, 1325	2, 250	0, 06637	1, 51760
1, 64485	0, 0500	2, 4387	2, 500	0, 04588	1, 68622
1, 96001	0, 0250	2, 9059	2, 750	0, 03181	1, 85487
2, 32640	0, 0100	3, 4490	3.0 00	0, 02158	2, 02347
2, 57586	0, 0050	3, 8190	3, 500	0, 00915	2, 36071
2, 80700	0, 0025	4, 1618	4.0 00	0, 00334	2, 69796
3, 08973	0, 0010	4, 5808	4, 500	0, 00115	3, O-3520
3, 29060	0, 0005	4, 8784	5.0 00	0, 00037	3, 37245
3, 48066	0, 00025	5, 1604	5, 500	0, 00009	3, 70969
3, 72749	0, 0001	5, 5391	6.0 00	0, 00001	4, 04694

Tabelele 5 şi 6.

— Tabele numerice dând valoarea ecartului *h* care are o

probabilitate p de a fi depăşit, respectiv probabilitatea p ca ecartul *h* să fie depăşit. (Relaţia între ecartul *h* şi ecartul redus *k* este dată în text.)

CELE PATBU SFERTURI ALE UNEI SERII DE PROBE

0.50 f

O, ttO

O, 30

0.20

0.10

0.00

1 2 3

Figura 1. Curba lui Galton

„Median" 1. Raportul A-/k indică *de câte ori* ecartul se conţinut în k (de la o până la 6 ori sau mai mult).

Valoarea h2 a ecartului veritabil *h*, definit prin faptul că există o şansă din patru ca h să fie depăşit, este ceea ce se numeşte *ecart median* al seriei de N probe repetate, referitoare la un eveniment aleator, a cărui probabilitate matematică este *p*.

1 Se observă că raportul *h*/*h* e sensibil egal cu raportul i/k. Probabilitatea primului dintre aceste rapoarte e dată, cu bună aproximaţie, de curba din *figura* l (curba lui Galton).

2 Din formula

„2 h + l obţinem expresia lui h:

CELE PATRU SFERTURI ALE UNEI SERII DE PROBE 77

Valoarea ecartului redus median a fost obţinută cu o mare precizie, folosind metode ale analizei matematice:

k = O, 6744897502…

Să insistăm din nou, sub o altă formă, asupra semnificaţiei absolut intuitive a ecartului median h. Să presupunem că facem un număr mare 91 de experienţe, fiecare dintre ele constând dintr-o serie de N probe. Aceste 91 experienţe se vor repartiza în patru grupe, conţinând fiecare un acelaşi număr de experienţe1:

91/4 experienţe cu abateri negative mari (abaterea dincolo de – h);

91/4 experienţe cu abateri negative mici (cuprinse între – h şi

O);

91/4 experienţe cu abateri mici pozitive (cuprinse între o şi + h);

91/4 experienţe cu abateri pozitive mari (depăşind + h).

În definitiv, la fel cum valoarea cea mai probabilă n ne permite să divizăm seria de N probe în două jumătăţi de importanţă egală, la fel ecartul median h subdivide această serie în patru sferturi. Am putea obţine opt optimi, luând în considerare valorile O, 375 şi O, 125 ale probabilităţii p (*tabelul* 5) etc. Ecartul median reuşeşte deci o ordonare şi clasificare perfecte a rezultatelor obţinute într-o serie de probe repetate.

*

Pentru a ne familiariza mai bine cu aceste noţiuni de importanţă capitală, vom explica ce se întâmplă la cele două extremităţi ale curbei (*fig*. 1) şi în regiunea ei de mijloc.

Ne întrebăm mai întâi care e probabilitatea p0 de a depăşi ecartul nul, adică de a obţine, pentru apariţia evenimentului considerat, unul din numerele:

(/i + l), (n + 2) ...<N-n).

1 A în spus deja că abaterile nule figurează jumătate în a doua categorie, jumătate în cea de-a treia.

78

CELE PATRU SFERTURI ALE UNEI SERII DE PROBE

E suficient ca în formula din subsol1 să anulăm pe *h*, ceea ce ne dă2:

Po = 7-T>

unde-s}? O reprezintă (ca şi la pagina 64) probabilitatea de a obţine *n* apariţii ale evenimentului aleator, deci probabilitatea de a constata un ecart nul. Vom avea aceeaşi probabilitate, p0, de a obţine unul dintre numerele de apariţii:

O, 1, 2... (n-2), (nu-l).

Aşadar:

sau:

ceea ce înseamnă: probabilitatea (p0) unei abateri negative,

probabilitatea P0 a unei abateri nule şi probabilitatea (p0) unei abateri pozitive au suma egală cu unu (certitudine). Or, acesta este exact rezultatul pe care *trebuia* să-l găsim.

Aceste observaţii dovedesc compatibilitatea celor două feluri de probabilitate: *ty* şi p (*tabelele* 5 şi 6 şi *figura* 1); în acelaşi timp, ele pregătesc pe cititor să înţeleagă a treia parte a programului nostru despre seria de probe.

În ceea ce priveşte regiunea de mijloc a curbei (*fig*. 1), vom vorbi din nou de ecartul median şi de valorile sale pentru partide mai lungi sau mai scurte de aruncat cu banul (p = l/2).

Tabelul 7 va avea acelaşi rol ca şi *tabelul* 4: ne vom da seama de eroarea pe care o comitem, aplicând datele din

1 La începutul curbei, când p este suficient de mic, curba e rectilinie: p este legat într-un mod simplu de Jr/k:

p =

ca şi de *h*:

2K27 rNp (l-ţi) 2 într-adevăr, în virtutea notei precedente, avem:

P" =

CELE PATRU SFERTURI ALE UNEI SEEII DE PROBE

7»

N	h	
	Recenzare directă	Calcul
10	O, 619077	O, 566462
20	1, 014336	1, 007984
50	1, 895466	1, 884681
100	2, 880760	2, 872448
200	4, 280240	4, 269362
500	7, 043087	7, 041025
1.000	10, 168022	10, 164618

Tabelul 7.

— Validitatea calculelor aproximative pentru ecartul median. (Se observă că eroarea se face totdeauna prin lipsă.)

tabelele 5 şi 6, când de fapt ele sunt riguros exacte doar pentru numere N foarte mari. Concluzia e mai satisfăcătoare decât în cazul anterior; eroarea e neglijabilă începând cu N = 20. După 1.000 de aruncări cu banul, ecartul median se află în vecinătatea lui 10. Aceasta înseamnă că jumătate din partidele de 1.000 de aruncări vor furniza între 490 şi 510

apariţii ale CAPULUI. Altfel spus, dacă am mizat l franc la fiecare aruncare, avem o şansă din patru de a pierde mai mult de 20 de franci, o şansă din patru de a pierde până la 20 de franci, o şansă din patru de a câştiga cel mult 20 de franci şi o şansă din patru de a câştiga mai mult de 20 de franci.

Pentru N = 100.000 de aruncări, ecartul median este cam de zece ori mai mare (exact: 106, 18022). Jumătate din partidele de 100.000 de aruncări se vor plasa între limitele 49 894 C şi 50 106 C.

Dar aceasta este exact compensaţia aproximativă, despre care l-am făcut pe cititor să bănuiască ceva încă mai înainte.

Această concentrare progresivă în jurul mediei are drept consecinţă necesară raritatea ecarturilor cu mult mai mari decât ecartul median (partea finală a curbei din *figura* 1).

Să facem raţionamentul în cazul partidelor de 10.000 de aruncări:

1. În jumătate din partide vom vedea ieşind CAPUL între 4 967 şi 5 033 de ori.

«o

CELE PATRU SFERTURI ALE UNEI SERII DE PROBE

2. *Cuadruplul* acestui ecart median (aproximativ 33, 225) corespunde neverosimilităţii. Doar într-o partidă din 100, ecartul va depăşi 133 într-un sens sau celălalt (CAPUL va apărea de mai puţin de 4 867 de ori sau de mai mult de 5 133 de ori).

3. Să te bizui pe realizarea unui ecart cu mult mai mare (de exemplu, *de zece ori* ecartul median) este o nebunie… Să considerăm, pentru a fixa ideile, o familie de trei persoane: tatăl, care este în voiaj, mama, care a rămas în oraşul natal, fiul, care e student la Facultatea de drept din Paris. Ei bine!, există mai multe şanse ca aceste trei persoane

să moară în aceeaşi zi decât să câştigi 600 de franci la capătul unei partide de aruncat cu banul, în care am mizat l franc pe CAP la fiecare din cele 10.000 de aruncări (rezultatul e acelaşi, chiar dacă alegem când CAP, când PAJURĂ, într-un mod arbitrar).

Altă comparaţie. Afirmaţia: „În 10.000 de aruncări cu banul, CAPUL va apărea între 4 700 şi 5 300 de ori" constituie un adevăr tot atât de cert ca şi: „Dacă o sferă conţine o sută de milioane de bile roşii şi 2 bile negre şi dacă amestecăm bilele vreme îndelungată, prima bilă extrasă va fi roşie".

În consecinţă, ne dăm seama – fără ambiguitate – că, în imensa varietate de serii de probe, cele ce prezintă abateri importante sunt infinit mai rare decât celelalte. Abaterile de mărime excepţională nu *se compensează*: a crede că unei întâmplări extraordinare îi va urma – „pentru a drege lucrurile" – o nouă excepţie de la regulă nu înseamnă a suprima neve roşim ilitatea, ci a o dubla [5]. Iată un fapt stabilit cu precizie: vom arunca de o sută de ori cu banul şi vom constata un ecart rezidual *h* oarecare; ne vom aşeza apoi din nou la joc pentru a recupera acest ecart (care ne este încă necunoscut); câte probe va trebui să efectuăm pentru a avea 999 de şanse din o mie de a anihila ecartul A? Răspunsul este stupefiant: 40 de milioane de aruncări! Ca şi în dreptul penal, trecutul îşi pune definitiv amprenta: el nu se şterge – ca să spunem aşa – niciodată.

Până acum ne-am ocupat de ecartul rezidual (ecartul la sfârşitul celor N probe); e cazul să ne ocupăm şi de ecarturile intermediare (ecarturi atinse în *cursul* celor N probe). Teoria

matematică, în acest caz, este evident mai complicată, dar putem da un rezultat simplu: *tabelele* 5 şi 6 rămân valabile, cu condiţia de a înmulţi numerele din coloanele care îl dau pe *k* cu 1, 70362 (fluctuaţiile posibile din cursul celor N aruncări sunt cu 70% mai mari decât cele ce subzistă finalmente).

Existenţa unor asemenea abateri intermediare dovedeşte de asemenea că, într-un joc oarecare de noroc, sumele care îşi schimbă proprietarul în timpul peripeţiilor unei lungi partide sunt cu mult mai

mari decât diferenţele finale. Aceasta nu face decât să sporească probabilitatea unei ruinări: să presupunem că la fiecare partidă jucătorul trebuie să pună miza pe masă, în faţa sa; deci, dacă – la un anumit moment dat – pierderile sunt mai mari decât capitalul lui, nu i se mai permite să continue jocul şi el pierde orice speranţă de recuperare [5].

Să considerăm un joc echitabil practicat de doi adversari cu capitaluri inegale. Orice jucător se va ruina, dacă are suficient timp la dispoziţie; dar pericolul îl ameninţă mai ales pe cel mai puţin avut. Un raţionament foarte simplu dovedeşte că, dacă Richard poate pune în joc un capital de nouă ori mai mare decât Modeste, el are o probabilitate de O, 9 de a-l ruina pe adversarul său, dacă jocul se desfăşoară indefinit. Dar asta nu este adevărat decât dacă Richard înfruntă „un singur Modeste"; dar, odată „îndulcit la câştig", Richard să se ferească să reînceapă experienţa la nesfârşit! Căci – înainte de a ajunge la cel de-al o sutălea „client" – există 90 de şanse dintr-o sută ca unul dintre ei să-l fi „uşurat" nu numai de întreg capitalul său, dar şi de beneficiile strânse cu greutate. Şi aici se vede care e diferenţa dintre o decizie ieşită din comun şi actele obişnuite, de zi cu zi.

Să adăugăm că, în cazul unui joc echitabil, un jucător, care mizează la fiecare partidă o zecime din capitalul său, are o şansă din două de a se ruina înainte de a fi jucat 267 de partide; acest număr e încă şi mai mic la ruletă (230 de partide) şi mai ales la jocul numit „à la boule" 1 (85 de partide). Teoria probabilităţilor e categorică [8]: ca să te ruinezi, nu e nevoie decât de ceva perseverenţă; dar de asta jucătorii nu duc lipsă.

1 Joc de noroc, cu bile, asemănător cu ruleta (*N.T.*).

PROBABILITĂŢILE ABATERILOR INDIVIDUALE

Un eveniment aleator are probabilitatea *p*. Considerăm o serie de N probe şi anume aceea pe care am împărţit-o în patru sferturi; numărul de apariţii se află printre următoarele (N + l) numere:

O, l, 2... (n-h) ... n... (n + h) ... N, unde n şi h au fost definiri anterior. Este absolut acelaşi lucru dacă considerăm cele (N + l)

abateri:

— N... – h... – l, O, l... h... (N – n);

fiecare dintre ele are o anumită probabilitate SJ3 de a se realiza, probabilitate pe care nu o cunoaştem încă; nu am vorbit până acum decât de probabilitatea i) 30 a abaterii nule. Vom preciza în continuare valorile probabilităţilor $ (presupunând, ca de obicei, că numărul N e foarte mare).

Să alegem deci o abatere îi oarecare, care are probabilitatea $ de a se realiza. Să arătăm mai întâi ce legătură există între determinarea lui $ şi problema precedentă, în care am notat cu p probabilitatea ca abaterea să fie mai mare decât *h*. Fie, de asemenea, p probabilitatea (mai mare decât p) ca abaterea să fie mai mare decât (*h*1). Un moment de reflectare ne va convinge că probabilitatea de a obţine o abatere *h* este:

am putea deci să găsim valorile lui $ pornind de la datele din *tabelele 5* şi 6; dar calculele vor fi mult uşurate prin întocmirea unui nou tabel.

Printr-un raţionament similar celui precedent, ne vom „debarasa" de cei doi factori *p* şi N, luând în considerare abaterea redusă A" şi probabilitatea P corespunzătoare ei. ÎncepROBABILITĂŢILE ABATERILOR INDIVIDUALE

83

k	P	P/P".	fe/k
— 5	0, 000001	0, 000004	7, 41301
— 4	0, 000134	0, 000335	5, 93041
— 3	0, 004432	0, 011109	4, 44781
— 2	0, 053991	O, 135335	2, 96520
— l, 5	O, 129518	O, 324652	2, 22390

—!	0, 241971	0, 606531	1, 48260
— 0, 67449	0, 317777	0, 815102	1,00.000
— 0, 5	0, 352065	0, 882497	0, 74130
— 0, 25	0, 386668	0, 969233	0, 37065
— 0, 1	0, 396953	0, 995013	0, 14826
±0	0, 398342	1,.000.000	0,00.000
— 0, 1	0, 396953	0, 995013	0, 14826
— 0, 25	0 386668	0, 969233	0, 37065
— 0, 5	0, 352065	0, 882497	0, 74130
— 0, 67449	0, 317777	0, 815102	1,00.000
+ 1	0, 241971	0, 606531	1, 48260
+ 1, 5	0, 129518	0, 324652	2, 22390
+ 2	0, 053991	0, 135335	2, 96520
+ 3	0, 004432	0, 011109	4, 44781
+ 4	0, 000134	0, 000335	5, 93041
+ 5	0, 000001	0, 000004	7, 41301

Tabelul 8.

— Probabilitatea diverselor abateri. Acest tabel este analog cu

tabelele 5 şi 6, cu diferenţa că, de data aceasta, este vorba de probabilităţi P individuale.

pem prin a calcula pe *k*, pornind de la *h*, *p* şi N; căutăm în *tabelul* 8 valoarea corespunzătoare a lui P1 şi găsim pe 5? prin aplicarea formulei din subsol [18].

E necesar să prezentăm cititorului câteva observaţii asupra acestui tabel şi a graficului (*fig*. 2) care îl reprezintă.

1 Fie:

P = $ (7Np (l-ţi); formula care dă acum pe *h* în funcţie de *k*:

h = *k*} 'Np (l-ţi)

este mai simplă decât cea pe care am utilizat-o pentru a calcula pe *p* (P74, nota 2), căci, evident, pentru a determina pe *ty*, nu mai trebuie să ţinem seama de termenul (1/2 O).

84

PROBABILITĂŢILE ABATERILOR INDIVIDUALE

22 *20* – *ia* – *îs* – fi – *a-i*. 0 – O.8 – *ce-oit-ot o* «a? «o» „o*…

Figura 2. „Curba clopot".

1. Curba se numeşte „curba clopot" (sau „clopotul lui Gauss"). Ea are un maxim, când abaterea e nulă; valoarea (O, 398942278) acestui maxim nu e decât l/>/27 c, ceea ce, evident, ne dă din nou valoarea probabilităţii ŞO a unei abateri nule (/i = O).

2. Alte două linii ale *tabelului* 8 sunt şi ele scrise cu caractere aldine: ele se referă – cititorul a ghicit desigur – la ecartul median şi corespund lui:

k = O, 6744897502…

Pe grafic, rezultatul e indicat prin două verticale punctate M şi M. Probabilitatea individuală a ecartului median e mai mare decât 8/9 din probabilitatea echipartiţiei (*tabelul 8*, coloana a 3-a): jumătate din probe furnizează abateri, ale căror probabilităţi individuale nu sunt decât cu puţin mai mici decât probabilitatea echipartiţiei.

3. Cele două verticale punctate şi axa de simetrie OP împart suprafaţa clopotului lui Gauss în patru părţi egale (ceea ce nu este – sub o altă formă – decât împărţirea seriei de N probe repetate în patru sferturi). Fiecare dintre aceste patru suprafeţe este egală cu un sfert

din suprafaţa unui pătrat cu latura egală cu unitatea, căci am luat pe cele două axe (orizontală şi verticală) aceeaşi unitate de măsură. Suprafaţa totală cuprinsă între curbă (despre care presupunem că e prelungită *până la infinit* în ambele sensuri) şi axa orizontală e deci egală cu unu, ceea ce exprimă în alt fel faptul că suma probabilităţilor de apariţie ale *tuturor* ecarturilor (negative, nule şi pozitive) este egală cu *unu* (certitudine).

4. A treia şi a patra coloană ne arată încă o dată raritatea extraordinară a abaterilor mari. Probabilitatea individuală a unui ecart de patru ori mai mare decât ecartul median e de ordinul unei sutimi; această probabilitate este de-abia o milionime pentru un ecart de şapte ori mai mare.

v 4X	7 ipO	1	2	3	4	6	
2	O, 5000.000	O, 2500.000					
4	O, 3750.000	O, 2500.000	0, 0625.000				
6	O, 3125.000	O, 2343750	0, 0937500	0, 0156250			
8	O, 2734375	O, 2187500	O, 1093750	0, 0312500	0, 0039062		
10	O, 2460937	O, 2050781	O, 1171875	0, 0439453	0, 0097656		
20	O, 1761971	O, 1601792	O, 1201343	0, 0739288	0, 0369644	0, 0046206	0
50	O, 1122752	O, 1079270	0, 0959617	0, 0788257	0, 0597857	0, 0270059	0
10 0	0, 0795892	0, 0780281	0, 0735270	0, 0665905	0, 0579584	0, 0389526	0
20 0	0, 0363485	0, 0557906	0, 0511 Î97	0, 0515211	0, 0480522	0, 0393752	0
50 0	0, 0356646	0, 0355226	0, 0350997	0, 0344060	0, 0331578	0, 0308900	0

1.000	0,0252250	0,0251717	0,0250242	0,0247755	0,0244314	0,0234743	0

Tabelul 9.

— Probabilităţile comparate ale aliatei n nule şi nle abaterilor mici – pozitive sau negative – pentru N aruncări cu banul (iczultate obţinute pl în calcul exact)

PROBABILITĂŢILE ABATERILOR INDIVIDUALE

Vom adăuga câteva observaţii referitoare la urna-etalon <5 (aruncarea cu banul), caz în care p = l/2.

Tabelul 9 ne dă probabilităţile individuale ale abaterilor nule (ŞO) şi ale abaterilor mici (pozitive sau negative). Dacă ne îndreptăm atenţia asupra abaterii 4, de exemplu, şi a partidelor de 10, 100 şi 1.000 de aruncări, această abatere corespunde respectiv aparıţiilor

9 C 54 C 504 C;

observăm că: „de 9 ori CAP" este un eveniment de 25 de ori mai puţin frecvent decât „de 54 de ori CAP"; „de 54 de ori CAP" apare în medie de 72 de ori, pe când „de 50 de ori CAP", de 100 de ori; în sfârşit, „de 504 ori CAP" e aproape la fel ăi *f*recvent ca „de 500 de ori CAP" (de 97 de ori faţă de 100).

Pe măsură ce numărul N al probelor repetate creşte, clopotul lui Gauss „se turteşte", se aplatizează.

Reprezentăriigrafice sunt deosebit de utile pentru multe evenimente *guvernate de hazard*.

Vom lua ca exemplu din nou Loteria Naţională, caz în care fiecare dintre biletele numerotate de la.000.000 la 999 999

are probabilitatea P = l/1000.000 de a fi „lozul cel mare", în *figura* 3, am plasat pe axa orizontală numerele şi pe cea verticală probabilitatea P a fiecăruia dintre ele (probabilitatea este aceeaşi). Graficul este o linie dreaptă orizontală. Suprafaţa cuprinsă între acest grafic, axa orizontală şi cele două verticale punctate este egală cu *unu*: asta nu înseamnă decât că este cert că un număr va fi câştigător.

Dimpotrivă, *figura* 4 este (păstrând aceleaşi unităţi de măsură) o „diagramă cumulativă": ea este, în cazul de faţă, o linie dreaptă, înclinată la 45° faţă de orizontală. De exemplu, punctul J corespunde

numărului 649 999 şi are o probabilitate p = 0, 35. Altfel spus, probabilitatea ca lozul cel mare să fie câştigat di un număr plasat în intervalul

649 999 «→ 999 999

este de 35%; ca şi *figura*l, *figura* 4 ne permite să determinăm probabilitatea ca rezultatul unui eveniment aleator pe care îl studiem să se plaseze dincolo de o anumită limită.

PROBABILITĂŢILE ABATERILOR INDIVIDUALE

87

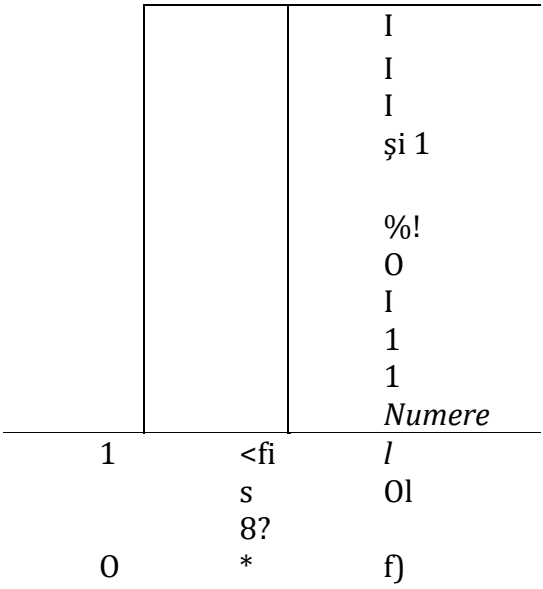

Figura 4

Unii vor obiecta poate că aceste grafice „nu servesc la nimic", de vreme ce ele sunt incapabile de „a ghida pe cumpărător în alegerea unui număr"! Critica nu are valoare, căci ea presupune că există o problemă de rezolvat, când de fapt o chestiune *contradictorie în termeni* nu poate comporta niciun răspuns.

Am insistat pe larg asupra legăturilor strânse existente între graficele din *figurile* l şi 2, dintre curbele lui Galton şi Gauss. Trebuie spus de altfel că, din punct de vedere matematic, prima curbă se deduce din cea de-a doua. Am preferat – 88

PROBABILITĂŢILE ABATERILOR INDIVIDUALE

În expunerea noastră – prezentarea lor în ordine inversă, numai pentru a face inteligibilă dezvoltarea istorică a problemei (de neînţeles altfel, fără să depăşim un anume nivel – pe care ni l-am impus – al cunoştinţelor matematice).

Curba lui Gauss (*fig*. 2) e deci fundamentală. Ea guvernează hazardul în acelaşi fel în care sinusoida stă la baza fenomenelor periodice ale acusticii şi ale radioelectricităţii. Clopotul lui Gauss joacă pentru evenimentele aleatoare acelaşi rol ca regula de trei simplă în viaţa de zi cu zi – acea regulă de trei simplă la care îşi limitează activitatea matematică cvasiunanimitatea persoanelor instruite… Să spunem – în încheiere – că foarte multe hist*ograme (gr*afice pe care sunt prezentate frecvenţele absolute ale unor mărimi aleatoare) se apropie ca „înfăţişare" de curba lui Gauss, ceea ce dă posibilitatea studierii lor prin intermediul acesteia din urmă.

14

LEGEA NUMERELOR MARI

Fiecare dintre noi a aflat, dintr-o lectură întâmplătoare, că există o lege, numită *lege a numerelor mari*, dar cam asta este tot ceea ce ştim despre ea! Acei ce au recurs la „bunul lor simţ", au interpretat această lege în sensul unei compensaţii riguroase.

Ce este deci legea numerelor mari (ar fi mai corect să spunem: legile numerelor mari)? De cincisprezece sau douăzeci de pagini nu facem decât să vorbim despre ea; aşa încât va fi foarte util „să punem punctul pe i".

Legile numerelor mari, care sunt cunoscute de mai bine de două secole [4], se împart în două clase: legi de identificare progresivă şi legi ale rădăcinii pătrate, care pot fi „citite" *toate* pe curba lui Gauss (*fig*. 2).

Identificarea progresivă se face între probabilitatea matematică – definită *apriori*, prin precizarea *experienţelor de organizare* (a circumstanţelor de apariţie ale unui eveniment aleator) – şi probabilitatea statistică – determinată *aposteriori*, prin efectuarea *experienţelor de control* (prin reînnoirea de un număr mare de ori a circumstanţelor de producere şi prin înregistrarea rezultatelor

obţinute).

Aceste idei vor deveni mai clare prin stabilirea unei apropieri între două cazuri particulare, pe care le-am lăsat distincte în mod intenţionat. Este vorba de un număr extrem de mare de probe: cu cât numărul N va fi mai mare, cu atât „lucrurile vor merge mai bine". Considerăm:

I. *Apriori*, numărul cel mai probabil n de apariţii ale evenimentului (de probabilitate p). Dacă numărul N e foarte mare, este de prevăzut că:

n = Np.

II. *Aposteriori*, procedăm efectiv la N extrageri şi, pentru a fi „de-a binelea" siguri, reîncepem această serie de extrageri de (91 – 1) ori. Găsim experimental 91 numere de apariţii:

m, *m*, *m*" ...

Facem suma lor şi împărţim prin 91; fie M numărul obţinut (numărul *mediu* de apariţii); constatăm că:

M = Np.j

Conchidem (prima parte a legii numerelor mari): pe măsură ce seria de probe e mai lungă, numărul mediu de reuşite ale unui eveniment se apropie tot mai mult de valoarea cea mai probabilă, pe care am determinat-o prin calcul, încă înainte de începerea experienţei.

Acest enunţ constituie o *lege limită1*; exemple analoage întâlnim în toate celelalte ştiinţe:

1. În geometrie. Dacă dublăm la nesfârşit numărul laturilor unui triunghi echilateral înscris într-un cerc, obţinem succesiv poligoane regulate cu 6, 12, 24... laturi. Perimetrul este asimptotic egal cu însăşi lungimea circumferinţei: el e cu atât mai apropiat valoric de această lungime, cu cât operaţia de dublare a fost efectuată de un număr mai mare de ori.

2. În fizică, proprietăţile unei mase gazoase se confundă cu atât mai bine cu cele ale unui gaz perfect, cu cât temperatura masei e mai

ridicată şi densitatea ei mai mică.

Am putea continua exemplificarea pe majoritatea „modelelor" la care am făcut aluzie. Structura legilor de probabilitate nu diferă prin nimic de cea a celorlalţi legi ştiinţifice; singura diferenţă rezidă în faptul că teoria probabilităţilor aduce în scenă variabilele aleatoare, probabilităţile şi alte mărimi care se deduc din ele, în loc de variabile independente la care se referă celelalte ştiinţe.

Legile numerelor mari, în care figurează o rădăcină pătrată (rădăcina pătrată a numărului N de probe repetate), *decurg din consideraţiile precedente* şi sunt de asemenea legi asimptotice, care sunt cu atât mai exacte (vezi *tabelele* 4 şi 7).

1 Sau, cum se spune adesea, o lege „asimptotică".

LEGEA NUMERELOR MARI M

cu cât seria de probe repetate este mai lungă. Am întâlnit mai multe legi, care se caracterizează printr-o proporţionalitate (directă sau inversă) cu m şi am pus în evidenţă – de fiecare dată – coeficienţii de proporţionalitate. Va fi suficient acum să reamintim *forma* acestor legi (eventual, cu observaţii suplimentare):

a) Probabilitatea ŞO a abaterii nule (sau a întoarcerii la compensaţie la sfârşitul probelor) e invers proporţională cu v/N: compensaţia riguroasă este cu atât mai rară cu cât numărul de probe e mai mare.

b) Numărul mediu M0 de întoarceri la compensaţie cursul unei serii de N probe e direct proporţional cu c) Rezultă că proporţia medie M0/N a întoarcerilor la compensaţie în decursul acestor probe e invers proporţională cu A/N: procentajul întoarcerilor la zero descreşte când N creşte.

d) Vom nota *cum* una din cele (N + l) eventualităţi posibile după recenzarea celor N probe repetate. Când N e mare, acest număr în de apariţii se scrie unde *h* este abaterea corespunzătoare (pozitivă sau negativă). Dacă fixăm pe *h*, probabilitatea 5(s de a obţine exact această abatere e bine determinată: ea este invers proporţională cu / N. e) Fiecare ecart *h* poate fi definit ca o fracţie (supraunitară sau subunitară) a ecartului median h, acesta fiind definit astfel încât să

existe o şansă din patru de a fi depăşit ecartul + h (sau aşa încât să existe o şansă din două ca ecartul *h* să fie în afara limitelor – h... + h). Am \azut că valoarea ecartului median e proporţională cu *în Re*zultă că, „dacă dispunem de suficient timp", orice *eca*rt poate fi obţinut şi această afirmaţie nu se află în contradicţie cu faptul că ecarturile mari sunt extrem de rare.

Această chestiune merită să fie clarificată, în mare, asta înseamnă că, dacă „extrem de rar" semnifică o probabilitate de o sutime de milionime, prin „dispunem de suficient timp" se poate subînţelege repetarea de un miliard de miliard de

LEGEA NUMERELOR MARI

ori a aceleaşi probe (la dreapta unui număr putem pune oricâte zerouri dorim).

Pentru a ilustra acest fapt, să determinăm numărul de probe pe care trebuie să le efectuăm pentru ca, mizând 10 franci la fiecare aruncare cu banul, & a avem o şansă din patru de a câştiga 20.000 de franci (şi, evident, o şansă din patru de a pierde aceeaşi sumă). Ecartul median h este deci 10.000 (el este egal cu jumătate din sumele plătite în final, p. 72); l-am exprimat în funcţie de N şi p (în acest caz, 1/2); calculul lui numeric ne dă imediat:

N = 879.000.000 de aruncări.

Nu sfătuim deci pe nimeni să strângă un anumit capital şi un număr mare de jucători, pentru a verifica aceste „certitudini ale hazardului". Căci, pe de o parte, nu avem decât o şansă din patru de a câştiga 20.000 de franci sau mai mult, ca şi o şansă din patru, de altfel, de a pierde mai mult de 20.000 de franci, ceea ce ne dă un *beneficiu nul*. Pe de alta, trebuie să ţinem cont de taxele – legitime şi modeste – încasate de casa de joc, ceea ce înseamnă că veţi plăti 1, 37% pentru ca să aveţi dreptul de a practica un joc echitabil. Astfel încasările societăţii anonime se vor ridica la

11 800.000 de franci, căci ZERO va fi ieşit de

2 370.000 de ori, antrenând, de fiecare dată, confiscarea automată a unei jumătăţi din miză.

Să fim convinşi că legile hazardului formează un ansamblu

coerent şi inatacabil, pe care cincisprezece generaţii de matematicieni l-au cercetat pe toate feţele, înainte de a ajunge la un acord *unanim*.

Să reluăm sumar problema raporturilor dintre cauzalitate şi probabilitate, pe care – la începutul cărţii – n-am putut decât să o schiţăm: suntem îndreptăţiţi să afirmăm că, sub influenţa progreselor ştiinţifice din ultima jumătate de secol, aceste raporturi au fost *complet răsturnate*.

„Ipoteza", veche de mai bine de două sute de ani, a existenţei moleculelor într-o masă gazoasă conducea la regăsirea

LEGEA NUMEEELOB MABI

ti

(prin calcul) a legilor experimentale, valabile la scară umană. Ideea cea mai naturală, ideea de „bun-simţ" se exprima astfel: de vreme ce creierul omenesc nu e capabil să urmărească, izolat, „foiala" moleculelor, prin aplicarea legilor mecanicii, rezultă automat că, *microscopic*, cauzalitatea este riguros valabilă şi probabilitatea nu se impune, decât *macroscopic*, datorită imperfecţiunii tehnicilor de observare şi a procedeelor matematice. Răspândirea prejudecăţilor lui Im-manuel Kant a contribuit mult la familiarizarea publicului larg cu această opinie, imposibil de susţinut, în realitate, lucrurile stau exact pe dos: legile de medie au fost adesea extrapolate în mod abuziv, în sensul unei cauzalităţi riguroase. Iar finalitatea, ale cărei baze sunt cu mult mai modeste, e încă şi mai îndoielnică. E clar că hazardul intervine în *toate* legile Universului, fără excepţie.

15

HAZARD STATISTIC ŞI HAZARD INDIVIDUAL

Hazardul aduce atâtea servicii omenirii, încât ar fi necesare o sută de pagini de acest format, doar pentru a ne face o idee. Serviciile făcute de hazard… Expresie care, ca şi „certitudinile hazardului", îl va face pe omul de pe stradă să dea din umeri, plin de compătimire! în viaţa sa cotidiană, omul îşi dă seama – uneori – de avantajele pe care le trage din chimie sau din radioelectricitate, dar, în general, nu înţelege cum pot geometria şi calculul să contribuie la fericirea lui [16].

Şi totuşi, teoria probabilităţilor ar trebui să intereseze pe toţi

oamenii de acţiune, al căror succes provine din decizii, care ele însele depind de date, din care unele sunt cunoscute sau calculabile, în timp ce altele sunt incerte sau problematice [11]. Un mare număr din proiectele noastre sunt legate de evenimente, a căror factori sunt supuşi hazardului. Conduita noastră e deseori ghidată, ba chiar determinată de noţiunea de probabilitate, într-o formă imprecisă şi instinctivă. Teoria probabilităţilor are deci o valoare practică de necontestat şi a ignora chiar noţiunile ei elementare e o adevărată infirmitate [36].

Noţiunea de hazard există în toate limbile şi tot în toate limbile e la fel de ambiguă. Cuvântul însuşi derivă etimologic dintr-un vechi joc de zaruri şi a dat naştere verbului „a se hazarda", care înseamnă a risca. La un congres de filosofie (1926), i s-au atribuit nici mai mult, nici mai puţin, de cinci semnificaţii diferite; evident că am ţinut seama de observaţiile filosofilor când am amintit definiţiile, asupra cărora savanţii sunt de acord, cu mici nuanţări. Acum când orizontul nostru s-a lărgit, să precizăm că hazardul înseamnă pur şi simplu tot ceea ce este susceptibil de a fi caracterizat

printr-o probabilitate (matematică sau statistică); rezultă că hazardul implică şi existenţa unei speranţe matematice sau a unei valori medii (două expresii sinonime). Hazardul, înţeles în acest sens ştiinţific, se numeşte şi „hazard statistic": el e singurul ce trebuie luat în serios, căci orice deducţie, orice aplicaţie presupune, alături de multe necunoscute, şi un minimum de date: nu se poate construi ceva din nimic [11]. E normal că, la limită, el se aplică cazurilor izolate: ne referim din nou la distincţia importantă dintre deciziile ieşite din comun şi activităţile obişnuite ale vieţii cotidiene, dintre o probă unică şi o serie de probe repetate.

Cu totul alta e concepţia populară despre hazard, despre ceea ce ar fi mai convenabil să fie numit „hazard individual" sau „hazard subiectiv". Nu este vorba decât de un mod exclusiv ver*bal d*e explicare, de justificare, aposteriori, a unui eveniment despre care nu se ştia nimic... El se află la originea problemelor prost formulate şi a

chestiunilor contradictorii. Putem nota chiar şi opunerea curioasă între „şansă" şi „hazard": un jucător, care consideră că „a avut şansă", nu va admite niciodată că „a câştigat din pur hazard"; pentru oamenii neinstruiţi şansa este un fel de influenţă, de divinitate favorabilă, care combate sau elimină pe dumnezeul hazard. Pe scurt, ei bâjbâie într-o mentalitate prelogică şi nu ajung să-şi dea seama că şansa nu decurge nicidecum din favorurile speciale ale unei providenţe problematice [33], în timp ce „fatalitatea" nu înseamnă decât coincidenţa, cu consecinţe dăunătoare, a unor circumstanţe improbabile.

Naivităţi la fel de senzaţionale pot fi emise şi de medici, avocaţi, profesori, care şi-au câştigat un anume renume în specialitatea lor. Drept „caz" concret, am ales [8] afirmaţiile făcute de un profesor de filosofie din provincie, în cadrul conferinţelor susţinute – şi apoi redactate [43]; el spunea în particular: „Dacă joci multă vreme la aceeaşi masă (de joc), eşti rugat să te muţi la altă masă1 şi aceasta fiindcă – ca să spunem aşa – masa a contractat o anumită obişnuinţă. Crup ierul lansează bila totdeauna în acelaşi fel, iar cilindrul este mereu acelaşi (calitativ); prin urmare, la un moment dat, poţi prevedea aproximativ – cel puţin, din când în

1 Ne putem întreba de unde a „pescuit" autorul această informaţie, complet falsă (am respectat întru totul „eleganţa" stilului).

când – ce număr va ieşi". Câte cuvinte, atâtea inepţii [35]: „a *prevedea apioximativ*" e nemaipomenit; dacă am mizat pe ŞASE şi a ieşit ŞAPTE, pot să cred că am prevăzut „aproximativ" numărul câştigător. Poate că acest „poet" îşi imaginează că – în acest caz – cazinoul îmi va restitui „aproximativ" miza… Un matematician eminent ne prevenise totuşi că hazardul are tot felul de capricii, dar nu şi obiceiuri [5]. Morala acestei păţanii este că hazardul ridică probleme complicate, a căror rezolvare depăşeşte cu mult posibilităţile unei inteligenţe medii, care le abordează fără o pregătire prealabilă suficientă.

Aceste erori sunt simptomatice pentru o concepţie perimată despre inteligenţă şi conduită. Subiectivismul îşi supravieţuieşte lui

însuşi în mod penibil. Progresele ştiinţifice ne fac, dimpotrivă, să gândim că omul nu e *măsuia lucrurilor*: ele ne incită să cunoaştem pe ceilalţi şi Universul, dacă vrem să ne cunoaştem pe noi înşine. Cunoaşterea lumii exterioare ne va permite când ia să ştim ceva despre „universul interior"; ştiinţa întregului ne va da şi „măsura omului" [35].

Oamenii „instruiţi au o scuză, gata pregătită: certitudinile şi exploatarea hazardului nu fac parte din nicio programă şcolară l şi totuşi, încă acum o sută treizeci de ani [33], cel mai mare poate dintre savanţii noştri susţinea că „nu există disciplină mai demnă de meditaţia noastră şi care să merite mai mult un loc în sistemul de instruire publică" l în momentul în care – încă o dată – au existat preocupări de reînnoire a conţinutului învăţăm întului secundar, ni s-a părut oportun [7] să se preconizeze introducerea – în ultima clasă a învăţăm întului secundar – a unor noţiuni elementare despre probabilităţi, ca *instrument de cultură*, ca un complement indispensabil. Prezenta carte precizează „nivelul" la care ar trebui să ne adresăm liceenilor de la secţia reală, în timp ce pentru „umanişti" ar trebui să ne limităm la o expunere simplificată, „supunându-ne" mai adesea experienţelor de verificare, în acelaşi timp, ar trebui să aruncăm lest peste bord, foarte mult lest, căci atâtea materii subzistă doar pentru că nimeni nu „se învredniceşte" să le suprime [12]. Zadarnice eforturi! admiraţia nemărginită pentru antici deţine şi azi supremaţia. Cercurile conducătoare ţin drept panaceu ceea ce ele însele au învăţat odată; lor li s-ar părea

desigur indiscret să li se reproşeze că neglijează discipline şi metode, despre care n-au niciun fel de idee… Atunci să nu ne mai mirăm că multe cadre didactice din învăţământul superior sunt contaminate de o mentalitate infantilă [35} şi că nu se manifestă o tendinţă de „resorbţie" a incapacităţii gene*rale de* adaptare1.

Spiritele curioase vor trebui deci să recurgă la popularizarea ştiinţifică, a cărei funcţie socială devine tot mai importantă.

Probabilităţile domină tot ceea ce în ştiinţă este realmente nou şi fecund; ele ne permit să adoptăm o conduită mai bună; ele ne obişnuiesc să raţionăm precis şi corect, ceea ce ne poate procura cea mai sănătoasă satisfacţie intelectuală. Căci – aşa cum scria un ilustru precursor al „teoriei şanselor" [29] – nimic nu e mai lăudabil decât să poţi domina, prin reguli, fenomene, care – depinzând de hazard – par să nu admită nicio lege, susträgându-se astfel raţiunii umane.

1 Teoria probabilităţilor nu a fost inclusă în programele de învăţământ ale liceelor, încă multă vreme după data primei apariţii a acestei cărţi (1941). Totuşi, pir. à la urmă, această situaţie anormală a fost lichidată în multe ţări – printre care atât Franţa, cât şi România. Astă/, i există un interes deosebit pentru problemele metodologice de predare a calculului probabilităţilor în învăţământul liceal, cât şi – În unele ţări – În cel preliceal. Pentru a da un singur exemplu, să semnalăm ţinerea unui Seminar internaţional de predarea probabilităţilor, la Vlena, în septembrie 1973 (*N. T.*).

INDICE BIBLIOGRAFIC

(!]. Pierre-Hyacinthe AZAÂS, *Des compensations dans* les *distinces humaines*, 1809. [2]. Louis BAGHELIER, *Le jeu*, *la chance et le hasard*, Flammarion.

1914.

[3]. Thomas BAYES, *Problem in the doctrine of cliances*, 1763. [4]. Jacques BERNOULLI, Ars *conjeciandi*, 1713. [5]. Joseph BERTRAND, Calcul *des probabili/ei* „Gauthier-Villars.

1889. [6]. BOILEAU, *L'art poetique*, versurile 76 şi 48 (după Irad. rom.

de I. Matinescu, E.S.P.L.A., „B.P.T.", 1957). [7]. Marcel BOLL, *Reune generale des sciences*, 30 iunie 1929. [8]. Marcel BOLL, *La chance et les jeux de hasard*, Larousse, 1936. [»]. Marcel BOLL, Les *quaire faces de la physlque*, Ed. Rât ion., 1939. [10]. Marcel BOLL, *Le miistere des nombres et des formes*, Larousse, 1941. [11]. Emile BOREL, *Le hasard*, Presses Universitaires, 1914. [12]. Emile BORE şi Robert DELTHEIL, *Probabilttes*, *errcurs*, Colin.

1923. [13]. Emile BOREL, capitolul „Probabilites", volumul I

din*Encyclopédie française*, 1937. [14]. Guido CASTELNUOVO, *La probabilite dans les differentes branches de la setence*, Hermann, 1937. [15]. Augustin COURNOT, Exposition *de* la *theorie des chances et des probabilites*, 1843.

[16]. Tobias DANTZIG, *Le nombre*, *lanyaqe de la science*, Payot, 1931. [17]. Georges DARMOIS, Statistique *mathématique*, Doin, 1928. [18]. Abraham DE MOIVRE, *Doctrine of chances*, 1716. [19]. René DUGAS, *L'incomprehension mathématique*, Vuibert, 1940. [20]. Louis-Gustave DU PASQUIER, *Le calcul des probabilites*, Hermann, 1926. (Autorul a scris un rezumat în: Georges URBAI şi Marcel BOLL, *La science*. *şes progres*, *şes applications*, volumul II, Larousse, 1934). [21]. Arthur EDDINGTON, *Nouveaux sentiers de la science*, Hermann.

1936. [22]. Julius EGGENBERGER, Beitroege *zur* Darslelliwg *des Bernoulli schen Theorems*, Berne, 1893.

[23]. Lucien FEBVRE, în *Science et loi* (lucrare colectivă), Presses Universitaires, 1935. [24]. Anatole FRANCE, *Le jardin d'Epicure*, Calmann-Le\y, 1894.

INDICE BIBLIOGRAFIC

[25]. Anatole FRANCE, *Les sept femmes de la Barbe-Bleue*, Calmann-Levy, 1909.

[26]. Philippe FRANK, *Le principe de causalitt ei şes limiles*, Flammarion, 1937.

[27]. Galileo GALILEI, *Consideraztone sopre îi gluco dei dadt*, 1642.

[28]. A.W. HAS1. ETT, *Les problèmes non resolus de la setence*, Hermann, 1938.

[29]. Christian HUYGENS, *De ratiocinits în Iudo aleoc*, 1657.

[30]. James JEANS, *Les noauelles bases philosophlques de la science*, Hermann, 1935.

[31]. John-Maynard KEYNES, A *treattse on probabtlily*, 1921.

[32]. LA FONTAINE, *Le meunler*, *son fils et Vane*, cartea III, fabula I (după trad. rom. de T. Măinescu, Ed. pentru literatură, „B.P.T.", 1963).

[33]. Pierre-Simon LAPLACE, *Essal philosophique* sur les *probabilttes* (1814), reed. Ghiron, 1920.

[34]. Paul LEVY, *Calcul des probabilttes*, Gauthier-Villars, 1925.
[35]. Regis AIESSAG, La *revolutton culturelle*, Nouvel-Age, 1938.
[36]. Paul MONTEL, în volumul I din *Encyclopédie francalse*, 1937.
[37]. Karl PEARSON, *La grammaire de la setence*, Presses Universitaires, 1912.
[38]. Henri POINCARÉ, *Calcul des probabilites*, Naud, 1896.
[39]. Hans REICHENBACH, *La philosophle scienilfique (uues nouvelles sur ses buts et ses melhodes)*, prefaţă de Marcel BOLL, Hermann, 1932.
[40]. Ernest RENAN, *Souoenirs d'enfance et de jeunesse*, 1883.
[41]. Bertrand RUSSELL, *Principia mathemaltca*, ediţia a 2-a, 1925.
[42]. Maurice SCHOENE, *La grammatre en zigzag*, în *L'Oeuvre*, 28 noiembrie 1937.
[43]. Joseph SEGOND, *Revue des cours et conferences*, Boivin, 15 martie 1934.
[44]. Joseph SEGOND, *Hasard et contingence*, Hermann, 1938.

TABLA DE MATERII

Introducere… 5
1. Caracterul aleator al viitorului i… 7
2. „O ştiinţă a ignorantului"… 12
3. Limitele certitudinii… 17
4. Sofismul „pretutindeni şi totdeauna"… 21
5. Urna ternară şi adunarea probabilităţilor… 25
6. Două extrageri dintr-o urnă binară: înmulţirea probabilităţilor… 31
7. O singură dată? Cel puţin o dată?… 36
8. Două urne binare: probabilitatea antecedentelor… 40
9. Adevăratul preţ al şansei: speranţă matematică, valoare medie 48
10. Probe repetate; probabilităţi de apariţie… 53
11. Credinţa în compensaţie… 61
12. Cele patru sferturi ale unei serii de probe… 72

13. Probabilităţile abaterilor individuale… 82
14. Legea numerelor mari… 89
15. Hazard statistic şi hazard individual… 94
Indice bibliografic… 98
Redactor: ION MOGA
Tehnoredactor: OLIMPIU POPA
Coli de tipar: 6, 25
Tirajul: 3.000» ex. Bun de tipar: 11.03.1978
Tiparul executat la întreprinderea poligrafică Sibiu
Republica Socialista România
Comanda nr. 427